

Potok przekształceń harmonicznych (skrypt wykładu)

Michał Miśkiewicz
mimuw.edu.pl/~mis/

2022-06-28

Spis treści

1	Wprowadzenie	5
1.1	Potok przekształceń harmoniczych a równanie ciepła	5
1.2	Interpretacje równania ciepła	6
1.3	Czym jest potok przekształceń harmoniczych (zapowiedź)	9
1.4	Zadania	11
2	Równanie ciepła	15
2.1	Wyprowadzenie jądra ciepła	15
2.2	Podstawowe własności rozwiązań	16
2.3	Równanie niejednorodne i wzór Duhamela	18
2.4	Regularność rozwiązań	20
2.5	Zadania	23
3	Uzupełnienie wiedzy z geometrii różniczkowej	25
3.1	Podrozumności przestrzeni euklidesowej	25
3.2	Twierdzenie o otoczeniu tubularnym	27
3.3	Rzut $\pi: \mathcal{M}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{M}$ i druga forma podstawowa	29
3.4	Krzywizna Riemanna w ujęciu zewnętrznym	30
3.5	Zadania	31
4	Klasyczna teoria potoku przekształceń harmoniczych	33
4.1	Określenie problemu	33
4.2	Istnienie rozwiązań na krótkim przedziale czasowym	34
4.3	Nierówności energetyczne	38
4.4	Wzór Bochnera	42
4.5	Globalne rozwiązania w przypadku rozmaitości o niedodatniej krzywiznie sekcijnej	44
4.6	Zadania	46

5	Przykłady osobliwości i kluczowe lematy techniczne	47
5.1	Przykład Chang-Ding-Ye w dwóch wymiarach	47
5.2	Przykład Chen-Ding w trzech wymiarach	51
5.3	Paraboliczna nierówność Harnacka	53
5.4	Twierdzenie o ε -regularności	58
5.5	Charakteryzacja punktów osobliwych	60
5.6	Wyższa regularność	61
5.7	Zadania	63
6	Konstrukcja Struwego (2D)	65
6.1	Słabe sformułowanie potoku przekształceń harmonicznyc	65
6.2	Globalne rozwiązanie z osobliwościami	67
6.3	Lokalne istnienie gładkiego rozwiązania	68
6.4	Iteracyjna konstrukcja słabego rozwiązania globalnego	70
6.5	Skończoność zbioru osobliwego	71
6.6	Regularność poza zbiorem osobliwym	72
6.7	Jednoznaczność rozwiązań	73
6.8	Zadania	78
7	Konstrukcja Chen-Struwego w wyższych wymiarach	79
7.1	Strategia konstrukcji	79
7.2	Rozwiązanie problemu Ginzburga-Landaua	80
7.3	Własności rozwiązań	81
7.4	Zachowanie w otoczeniu punktu regularnego	83
7.5	Przejście do granicy w punktach regularnych	85
7.6	Oszacowanie zbioru osobliwego i jego konsekwencje	87
7.7	Twierdzenie Chen-Struwego	90
7.8	Zadania	91
A	Krzywizna Riemanna w ujęciu wewnętrznym	92
A.1	Koneksja Levi-Civity	92
A.2	Koneksja Levi-Civity na podrozmaitości	93
A.3	Krzywizna Riemanna	94
A.4	Równanie Gaussa	94

B	Uzupełnienie wiedzy o przestrzeniach Sobolewa	95
B.1	Podstawowe pojęcia	95
B.2	Fundamentalne twierdzenia	97
B.3	Nierówności typu Poincarégo	98
B.4	Funkcje Sobolewa o wartościach w zadanej rozmaitości	99
C	Propozycje tematów zaliczeniowych	102
	Bibliografia	105

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1 Potok przekształceń harmoniczych a równanie ciepła

Potok przekształceń harmoniczych (ang. *harmonic map flow*, w skrócie HMF) jest geometrycznym uogólnieniem klasycznego równania ciepła, dlatego zaczniemy od omówienia tego drugiego. Żeby od razu zwrócić uwagę na problemy, które pojawią się później, przypomnę trzy cechy charakteryzujące *problem dobrze postawiony* w sensie Hadamarda¹:

- (a) istnieje rozwiązanie problemu;
- (b) rozwiązanie to jest jednoznaczne;
- (c) zależy ono w sposób ciągły od warunków brzegowych.

Żaden z tych warunków nie jest tutaj ściśle sformułowany, bo (a) nie wiadomo, jakim pojęciem rozwiązania operujemy, (b) w jakiej klasie żądamy jednoznaczności, oraz (c) w jakiej topologii rozpatrujemy ciągłość operatora rozwiązania. Mimo to, warto o nich pamiętać jako o podstawowych własnościach, których oczekujemy od rozwiązań równań różniczkowych (zwłaszcza tych opisujących zjawiska fizyczne).

Równanie ciepła w przestrzeni \mathbb{R}^n ma następującą postać. Mając zadaną funkcję $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, szukamy funkcji $u: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będącej rozwiązaniem

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0 & \text{dla } t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (\text{HE})$$

Funkcja u_0 pełni rolę warunku brzegowego; w tym kontekście powiedzielibyśmy – początkowego. Natomiast Δ jest tutaj oznaczeniem na operator Laplace'a² (lub *laplasjan*)

$$\Delta u = \partial_{11}u + \partial_{22}u + \dots + \partial_{nn}u.$$

¹Jacques Hadamard (1865-1963), francuski matematyk

²Pierre Simon de Laplace (1749-1827), francuski uczony

Zgodnie z konwencją, litera t jest tu zarezerwowana dla pierwszej współrzędnej (*czasu*), a $x = (x_1, \dots, x_n)$ dla pozostałych współrzędnych (*przestrzennych*). Domyślnie wszystkie operatory różniczkowe (∇, Δ, \dots) będziemy stosować jedynie do współrzędnych przestrzennych (czyli do funkcji $u(t, \cdot)$).

Jak zapewne wszystkim wiadomo, równanie ciepła (HE) posiada jawne rozwiązanie:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y) dy. \quad (1.1)$$

Standardowymi metodami można się przekonać, że (przy niewielkich założeniach na u_0) tak zdefiniowana funkcja u rozwiązuje równanie ciepła (a), a małe zaburzenia u_0 dają w rezultacie małe zaburzenia u (c). Da się też (znowu – przy odpowiednich założeniach) dowieść jednoznaczności rozwiązań (b), czyli faktu, że dla zadanego u_0 istnieje dokładnie jedno u . Wymaga to jednak tzw. zasady maksimum. Wszystko to stanowi dobry materiał do ćwiczeń (zob. zadania 1.1, 1.2, 1.3, 1.4).

1.2 Interpretacje równania ciepła

Potok przekształceń harmoniczych stanowi uogólnienie równania ciepła na przypadek warunku początkowego $u_0: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$; dziedzina \mathcal{M} i przeciwdziedzina \mathcal{N} są tutaj dwiema rozmaitościami Riemanna³. Żeby sensownie określić, czym takie uogólnienie miałyby być, trzeba przyjrzeć się samemu równaniu ciepła. Jak się okaże, nie wszystkie interpretacje pozwalają na takie uogólnienie, ale i tak warto je znać.

Interpretacja fizyczna

Należałoby zażądać $u, u_0 \geq 0$, ale nieważne

Funkcja u_0 modelować będzie zadany rozkład ciepła na \mathbb{R}^n w chwili 0. Funkcja u opisuje wówczas szukany rozkład w dowolnej chwili $t > 0$. Ustalmy jakiś gładki obszar $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Oczekujemy wówczas, by zmiana w czasie $\int_{\Omega} u dx$, czyli łącznego ciepła w Ω , odpowiadała ucieczce ciepła przez brzeg. Zakładając, że lokalny przepływ ciepła jest proporcjonalny do $-\nabla u$ (zgodnie z zasadą, że ciepło przechodzi z miejsc cieplejszych do chłodniejszych), oznacza to równość

Zależnie od kontekstu:
 $dx = d\lambda_n(x)$ lub
 $dx = d\lambda_{n-1}(x)$

$$\partial_t \int_{\Omega} u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n} dx.$$

Wchodząc z różniczkowaniem pod znak całki z jednej strony, a stosując twierdzenie Gaussa o dywergencji [Str12, Lem. 7.55] z drugiej, otrzymujemy stąd

$$\int_{\Omega} \partial_t u dx = \partial_t \int_{\Omega} u dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \vec{n} dx = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) dx = \int_{\Omega} \Delta u dx.$$

Ostatnie przejście jest czysto notacyjne, jeśli przypomnimy sobie, że gradient u to pole wektorowe $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$, dywergencja pola $V = (V^1, \dots, V^n)$ to funkcja $\operatorname{div} V = \partial_1 V^1 + \dots + \partial_n V^n$, a laplasjan u to funkcja $\Delta u = \partial_{11} u + \partial_{22} u + \dots + \partial_{nn} u$.

Wiemy zatem, że całka $\int_{\Omega} (\partial_t u - \Delta u) dx$ jest zerowa dla *dowolnego* obszaru Ω (i dowolnego momentu $t > 0$). Wynika stąd, że funkcja podcałkowa musi być po prostu zerowa, i w ten sposób wyprowadziliśmy równanie ciepła. Opis ten nie pozwala jednak na pożądane uogólnienie.

³Bernhard Riemann (1826-1866), niemiecki matematyk

Interpretacja dyskretna

Dla uproszczenia przyjmijmy $n = 1$. Dla jeszcze większego przybliżenia – że $u_0: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $u: \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Wartości $u(t, n)$ odpowiadają tu temperaturom poszczególnych punktów kraty. Przyjmijmy, że ciepło z n może uciec bezpośrednio jedynie do sąsiednich punktów $n \pm 1$, i czyni to z intensywnością proporcjonalną do różnicy temperatur. W chwili $t + 1$ temperatura punktu n wynosi więc

$$\begin{aligned} u(t+1, n) &= \underbrace{u(t, n)}_{\text{temp. w chwili } t} + \underbrace{\frac{1}{2}(u(t, n-1) - u(t, n))}_{\text{ciepło z } n-1} + \underbrace{\frac{1}{2}(u(t, n+1) - u(t, n))}_{\text{ciepło z } n+1} \\ &= \frac{u(t, n-1) + u(t, n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Ten punkt widzenia ma tę oczywistą zaletę, że właśnie otrzymaliśmy jawny wzór na rozwiązanie.

Aby móc zastosować opisany wyżej model dyskretny do przypadku ciągłego, możemy *zagęścić* kratę. Weźmy mianowicie duże $k \in \mathbb{N}$ i przyjmijmy $u_0: \frac{1}{k}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $u_k: \frac{1}{k^2}\mathbb{N} \times \frac{1}{k}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Oznacza to, że krok przestrzenny ma wielkość $1/k$, a krok czasowy $1/k^2$. Równanie pozostaje takie samo:

Dlaczego przyjmujemy inne wartości kroku w przestrzeni i w czasie?

$$u_k(t + \frac{1}{k^2}, x) = \frac{u_k(t, x - \frac{1}{k}) + u_k(t, x + \frac{1}{k})}{2}. \quad (1.2)$$

Przy $k \rightarrow \infty$ ciąg funkcji u_k zbiega do u będącego rozwiązaniem (HE). Dobrym ćwiczeniem jest przekonać się samodzielnie, dlaczego i w jakim sensie (zadania 1.6, 1.7).

Powyższe skalowanie tłumaczy, dlaczego równanie ciepła przenosi informację z nieskończoną prędkością. Innymi słowy: dlaczego wartość $u(t, 0)$ zależy od wartości u_0 na całym \mathbb{R}^n , a nie tylko na małej kuli wokół zera.

Dobrym ćwiczeniem jest też zastanowienie się, jak przenieść takie dyskretne rozważania na funkcje o wartościach w rozmaitości, np. w $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Jest to możliwe, ale wybierzemy inną drogę.

Interpretacja probabilistyczna

Równanie ciepła (HE) można otrzymać, przyjmując, że ciepło składa się z nieskończenie wielu cząstek ciepła, z których każda porusza się zgodnie z procesem Wienera⁴ (ruchem Browna⁵). Cząstka startująca z punktu x po czasie $t > 0$ znajduje się więc w (losowym) punkcie $x + W_t$; ma on rozkład normalny ze średnią x i wariancją t .

Początkowy rozkład ciepła u_0 można interpretować jako rozkład zmiennej losowej X_0 , opisującej położenie losowo wybranej cząstki. Położenie losowej cząstki w chwili $t > 0$ jest wtedy opisane zmienną $X_t = X_0 + W_t$, której rozkład można obliczyć jako splot:

Być może powinniśmy założyć $u_0 \geq 0$ i $\int u_0 = 1$, ale nieważne

$$u(t, x) = u_0 * g_{\mathcal{N}(0,t)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) u_0(y) dy.$$

⁴Norbert Wiener (1894-1964), amerykański matematyk (ale jego ojciec urodził się w Białymstoku)

⁵Robert Brown (1773-1858), szkocki botanik

Jak widać, otrzymany wzór zgadza się z (1.1) z dokładnością do przeskalowania czasu. Istotnie, powyższa funkcja u jest rozwiązaniem równania $\partial_t u - \frac{1}{2}\Delta u = 0$.

Związek między równaniem ciepła a procesem Wienera – lub ogólniej, między równaniami parabolicznymi a procesami stochastycznymi – opisuje również twierdzenie Feynmana-Kaca⁶. W najprostszym przypadku daje ono

$$u(t, x) = \mathbb{E} u_0(x + W_t),$$

co oczywiście jest tożsamy z wcześniejszym wynikiem (zadanie 1.9). Natomiast sama metoda dowodu, oparta na wzorze Itô⁷, pozwala pracować również z rozwiązaniami równania *niejednorodnego* $\partial_t u - \Delta u = f$ (z zadanym f) oraz na dowolnej dziedzinie w miejsce \mathbb{R}^n (zadanie 1.10). Okazuje się ona owocna np. w kontekście dowodu parabolicznej nierówności Harnacka.

Warto zwrócić uwagę na dyskretny przypadek opisanej tu interpretacji probabilistycznej. Dla dziedziny $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ w miejsce $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ można mianowicie zastąpić proces Wienera błędzeniem losowym, otrzymując w ten sposób model omówiony wcześniej.

Zakładając, że mamy do dyspozycji proces Wienera na rozmaitości \mathcal{M} , powyższa konstrukcja daje nam uogólnienie równania ciepła na przypadek $u: [0, \infty) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Może też przy okazji posłużyć do określenia operatora Laplace'a-Beltramiego⁸ $\Delta_{\mathcal{M}}$. Nie pomaga jednak w przypadku innej przeciwdziedziny.

Potok gradientowy

Zwróćmy naszą uwagę na wielkość

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx,$$

ze względów historycznych zwaną energią Dirichleta⁹. Można patrzeć na nią jako na funkcję z przestrzeni

$$X = \{u \in C^1(\mathbb{R}^n) : E(u) < \infty\}$$

w liczby rzeczywiste. Przyjmując, że równanie ciepła stanowi ewolucję u_0 w kierunku najszybszego zmniejszenia energii, możemy zapostulować, że u powinno być funkcją $u: [0, \infty) \rightarrow X$ spełniającą $u(0) = u_0$ oraz $\partial_t u = -\nabla E(u)$. Ścisłe sformułowanie tego równania wymaga pokonania pewnych trudności technicznych, więc jest przesunięte do zadań 1.11, 1.12, 1.13; tutaj ograniczymy się do formalnego wyprowadzenia.

Zauważmy najpierw, że dla funkcji $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ odpowiednio szybko znikających w nieskończoności zachodzi następująca tożsamość:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta f \cdot g dx = \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{jj} f \cdot g dx = - \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f \cdot \partial_j g dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f \cdot \nabla g dx,$$

⁶Richard Feynman (1918-1988), amerykański fizyk
Mark Kac (1914-1984), polsko-amerykański matematyk (emigrował w 1938)

⁷Kiyosi Itô (1915-2008), japoński matematyk

⁸Eugenio Beltrami (1835-1900), włoski matematyk

⁹Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), niemiecki matematyk

opierająca się na całkowaniu przez części względem współrzędnej x_j . Biorąc teraz dowolną funkcję $u: [0, \infty) \rightarrow X$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial_t E(u) &= \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \partial_t \nabla u dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \partial_t u dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \partial_t u dx \\ &\geq - \|\Delta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

W powyższym oszacowaniu równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy te dwie funkcje są proporcjonalne: $\partial_t u = c(t)\Delta u$ dla pewnej stałej c (zależnej od t). To motywuje wprowadzenie równania ciepła jako $\partial_t u = \Delta u$; więcej szczegółów można znaleźć w zadaniach 1.11, 1.12, 1.13.

Interpretacja równania ciepła jako potoku gradientowego energii Dirichleta przenosi się bez zmian na przypadek przekształceń między rozmaitościami: $u_0: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ oraz $u: [0, T] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Posłuży nam więc jako punkt wyjścia.

1.3 Czym jest potok przekształceń harmoniczych (zapowiedź)

Satysfakcjonujące omówienie choćby najprostszych własności potoku przekształceń harmoniczych wymaga pewnych technicznych przygotowań: głębszego wejścia w równanie ciepła oraz przypomnienia podstawowych pojęć geometrii różniczkowej. Dlatego w tym podrozdziale jedynie zasygnalizuję drogę, jaka jest do pokonania. Na ścisłość jeszcze przyjdzie czas.

Zarysowana wyżej konstrukcja potoku gradientowego opiera się na operatorze Eulera-Lagrange'a¹⁰. W ogólności, jeśli E jest funkcjonałem – czyli funkcją przyjmującą funkcje jako argumenty – oraz

$$\partial_t E(u) = \int \mathcal{L}u \cdot \partial_t u dx,$$

to operator $\mathcal{L}u$ nazywamy operatorem Eulera-Lagrange'a dla tego funkcjonału. Wspomnijmy kilka przykładów:

- Jak już się przekonaliśmy, dla $E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx$ mamy $\mathcal{L}u = -\Delta u$.
- W ogólniejszym przypadku, gdy $E(u) = \int F(\nabla u) dx$, mamy $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(\nabla F(\nabla u))$ (zadanie 1.14).
- Dla energii Dirichleta $E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx$ i funkcji o wartościach w rozmaitości Riemanna \mathcal{N} , operatorem Eulera-Lagrange'a jest $-\Delta_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}} u$.

¹⁰Leonhard Euler (1707-1783), szwajcarski uczony
Joseph Louis Lagrange (1736-1813), włosko-szwajcarski uczony

Powyżej $\Delta_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}} u$ jest odpowiednio uogólnionym operatorem Laplace'a, którego nawet tu nie zdefiniuję. Zwróćmy jednak uwagę, że $\partial_t u(t, x)$ jest wektorem stycznym do \mathcal{N} w $u(t, x)$, więc żeby nadać iloczynowi $\mathcal{L}u \cdot \partial_t u$ sens iloczynu skalarnego, $\mathcal{L}u(t, x)$ również musi być wektorem stycznym. Inaczej w ogóle nie ma sensu.

Sprowadzając rozważania na bardziej elementarną ziemię, przyjmijmy, że $\mathcal{M} = \mathbb{R}^n$ jest po prostu przestrzenią euklidesową, a $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ jest podzbiorem przestrzeni euklidesowej. Wtedy możemy wykorzystać poprzedni rachunek:

$$\partial_t E(u) = - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \partial_t u \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^\top u \cdot \partial_t u \, dx,$$

zamieniając wektor $\Delta u(t, x) \in \mathbb{R}^d$ na $\Delta^\top u(t, x) \in T_{u(t, x)} \mathcal{N}$ – jego rzut na przestrzeń styczną do \mathcal{N} w $u(t, x)$. Korzystamy w ten sposób ze styczności wektora $\partial_t u(t, x)$. Uzyskaliśmy dzięki temu *zewnątrzny* opis $\Delta_{\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}} u$ i możemy sformułować równanie potoku przekształceń harmoniczych następująco:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \Delta^\top u(t, x) = 0 & \text{dla } t > 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

Jak się okaże, problem ten jest bardzo źle postawiony w sensie Hadamarda:

- Istnienie rozwiązania $u: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{N}$ klasy C^2 można zagwarantować jedynie dla szczególnych wyborów \mathcal{N} , albo jedynie na krótkim przedziale czasowym $[0, T]$, albo jedynie w słabym sensie (dopuszczając rozwiązania nieciągłe).
- Są przykłady danych początkowych u_0 , dla których istnieje wiele rozwiązań. Jednoznaczność jest znana dla odpowiednio regularnych u_0 , ale również tylko dla krótkich czasów rozwiązania.
- Pytanie o stabilność ma sens jedynie wtedy, gdy rozwiązania są jednoznaczne. W związku z tym znane wyniki dotyczą jedynie regularnych u_0 i krótkich czasów rozwiązania.

Podana wyżej postać równania potoku przekształceń harmoniczych nie wyjaśnia, skąd te wszystkie trudności. Z pomocą przychodzi tzw. druga forma podstawowa. Dla ustalonego $p \in \mathcal{N}$ jest to symetryczna forma dwuliniowa $A_p: T_p \mathcal{N} \times T_p \mathcal{N} \rightarrow (T_p \mathcal{N})^\perp$. Pozwala ona dla dowolnego pola stycznego V na \mathcal{N} rozłożyć pochodną kierunkową V (w kierunku wektora stycznego W) na część styczną i prostopadłą:

$$\partial_W V(p) = \underbrace{(\partial_W V(p))^\top}_{\in T_p \mathcal{N}} - \underbrace{A_p(V, W)}_{\in (T_p \mathcal{N})^\perp}.$$

Ponieważ druga pochodna $\partial_{jj} u$ stanowi pochodną kierunkową pola stycznego $\partial_j u$ w kierunku $\partial_j u$, otrzymujemy $\partial_{jj} u = (\partial_{jj} u)^\top - A_u(\partial_j u, \partial_j u)$ i w konsekwencji

$$\partial_t u - \Delta u = \partial_t u - \Delta^\top u + \sum_{j=1}^n A_u(\partial_j u, \partial_j u) = \sum_{j=1}^n A_u(\partial_j u, \partial_j u).$$

Prawa strona zależy nieliniowo od przekształcenia u i jego pochodnych. Ta nieliniowość – mająca swoje źródło w geometrycznym więzie $u(x) \in \mathcal{N}$ – jest fundamentalnym powodem, dla którego rozwiązania mogą tworzyć osobliwości w skończonym czasie.

Warto samodzielnie prześledzić podobny fenomen dla równań zwyczajnych (zadanie 1.15), oraz wyprowadzić jawną postać równania dla $\mathcal{N} = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ (zadanie 1.16).

W literaturze można spotkać różne konwencje, jeśli chodzi o znak A

1.4 Zadania

Zadanie 1.1. Dla zadanego u_0 definiujemy rozwiązanie równania ciepła u wzorem

$$(1.1) \quad u(t, x) := (4\pi t)^{-n/2} \int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y) dy. \text{ Sprawdzić, że}$$

- (a) jeśli $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła i ograniczona, to $u(t, x) \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0(x)$ jednostajnie;
- (b) jeśli $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to $u(t, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow 0} u_0$ w $L^1(\mathbb{R}^n)$;
- (c) w każdym z tych przypadków $\partial_t u - \Delta u = 0$ dla $t > 0$.

Zadanie 1.2. Przekonać się, że wzór (1.1) jest stabilny ze względu na zaburzenie danych początkowych: jeśli u, v są rozwiązaniami odpowiednio dla u_0, v_0 , to wówczas

$$\|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \text{dla dowolnego } 1 \leq p \leq \infty.$$

Zadanie 1.3. (zasada maksimum) Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie ograniczonym obszarem oraz niech $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$. Jeśli ciągła funkcja $u: \overline{\Omega}_T \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładką w Ω_T oraz jest podrozwiązaniem równania ciepła $\partial_t u - \Delta u \leq 0$, to

$$\sup_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\partial_P \Omega_T} u,$$

gdzie $\partial_P \Omega_T = \{0\} \times \Omega \cup [0, T] \times \partial\Omega$ jest tzw. *brzegiem parabolicznym*.

Wskazówka. Założyć najpierw $\partial_t u - \Delta u < 0$. Rozważając funkcję $u - \varepsilon t$ na dziedzinie $\Omega_{T-\varepsilon}$, pozbyć się dodatkowych założeń.

Zadanie 1.4. Załóżmy, że $u: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rozwiązuje równanie ciepła $\partial_t u - \Delta u = 0$, a ponadto jest funkcją ciągłą, ograniczoną, a dla $t > 0$ również gładką. Wówczas

$$\sup_{[0, T] \times \mathbb{R}^n} u = \sup_{\{0\} \times \mathbb{R}^n} u.$$

Wynioskować, że dla funkcji danych początkowych $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ wzór (1.1) zadaje jedyne rozwiązanie równania ciepła w klasie funkcji ciągłych ograniczonych.

Wskazówka. Zastosować na dużej kuli B_R zasadę maksimum dla funkcji $v = u - \varepsilon\varphi$, gdzie $\varphi(t, x) = (2T - t)^{-n/2} \exp(-|x|^2/4(2T - t))$.

Zadanie 1.5. (nieskończona prędkość propagacji) Załóżmy, że $u_0 \geq 0$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną, $u \not\equiv 0$. Wówczas rozwiązanie u zadane wzorem (1.1) spełnia $u(t, x) > 0$ dla *wszystkich* $t > 0$ i $x \in \mathbb{R}^n$.

Zadanie 1.6. Dla funkcji $v: \varepsilon\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ wprowadźmy oznaczenie $Dv(x) := \frac{v(x+\varepsilon)-v(x)}{\varepsilon}$ (dyskretną pochodną). Wykazać, że jeśli funkcja $u_0: \frac{1}{k}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia ograniczenia $|u_0(x)|, |Du_0(x)|, |DDu_0(x)| \leq C$ dla dowolnego $x \in \frac{1}{k}\mathbb{Z}$, to rozwiązanie dyskretnego równania ciepła u_k (zadane wzorem (1.2)) również spełnia te same ograniczenia, a ponadto $\left| \frac{u_k(t+\frac{1}{k^2}, x) - u_k(t, x)}{1/k^2} \right| \leq C$.

Zadanie 1.7. Niech $u_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją, dla której $|u_0|, |u_0'|, |u_0''| \leq C$. Określmy rozwiązania dyskretnie $u_k: \frac{1}{k^2}\mathbb{N} \times \frac{1}{k}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem (1.2). Wykazać, że można je przedłużyć na zbiór $[0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ w taki sposób, by pewien podciąg zbiegał niemal jednostajnie do ciągłej funkcji $u: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sprawdzić, że granica spełnia równanie ciepła w sensie lepkościowym, to znaczy:

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C^\infty \quad \varphi(t, x) = u(t, x), \quad \varphi > u \text{ na otoczeniu } (t, x) \\ \implies \quad \partial_t \varphi(t, x) - \frac{1}{2} \Delta \varphi(t, x) \leq 0; \\ \forall \varphi \in C^\infty \quad \varphi(t, x) = u(t, x), \quad \varphi < u \text{ na otoczeniu } (t, x) \\ \implies \quad \partial_t \varphi(t, x) - \frac{1}{2} \Delta \varphi(t, x) \geq 0. \end{aligned}$$

Wskazówka. Wykazać, że dla dużych k , $\varphi - u_k$ musi mieć lokalne minimum blisko (t, x) .

Zadanie 1.8. (twierdzenie graniczne de Moivre'a-Laplace'a) Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania: wyznaczyć jawny (nie rekurencyjny) wzór na u_k i w granicy wprowadzić wzór (1.1) na u .

Zadanie 1.9. (wzór Feynmana-Kaca) Wykazać, że jeśli $u: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągłym i ograniczonym rozwiązaniem równania ciepła $\partial_t u - \frac{1}{2} \Delta u = 0$ z danymi początkowymi u_0 , to

$$u(t, x) = \mathbb{E} u_0(x + W_t).$$

Wskazówka. Przy ustalonych t i x , zastosować wzór Itô dla procesu $X_s = u(t-s, x + W_s)$.

Zadanie 1.10. (a) Jeśli funkcja ciągła ograniczona $u: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ rozwiązuje niejednorodne równanie ciepła $\partial_t u - \frac{1}{2} \Delta u = f$ z danymi początkowymi u_0 , to

$$u(t, x) = \mathbb{E} u_0(x + W_t) + \int_0^t \mathbb{E} f(t-s, W_s) ds.$$

(b) Jeśli funkcja ciągła ograniczona $u: [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ rozwiązuje równanie ciepła $\partial_t u - \frac{1}{2} \Delta u = 0$ na gładkim obszarze $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ z danymi początkowo-brzegowymi $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, to

$$u(t, x) = \mathbb{E} g(t - \tau, x + W_\tau),$$

gdzie $\Gamma = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0, \infty) \times \partial\Omega)$ jest parabolicznym brzegiem rozważanej dziedziny, a τ jest minimum z t oraz czasu dojścia $x + W_t$ do $\partial\Omega$.

Zadanie 1.11. Załóżmy, że funkcja $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ma zwarty nośnik (czyli $E \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$) lub jest 1-okresowa względem każdej ze współrzędnych (czyli $E \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$). Wykazać, że dla dowolnego $u_0 \in \mathbb{R}^n$ równanie

$$\begin{cases} u'(t) = -\nabla E(u(t)), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

- (a) ma gładkie rozwiązanie $u: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- (b) $\frac{d}{dt}E(u(t)) = -|\nabla E(u(t))|^2$, w szczególności $E(u(t))$ jest funkcją nierosnącą;
- (c) jeśli $C := \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla E(x) = 0\}$ jest zbiorem punktów krytycznych E , to

$$\text{dist}(u(t), C) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Wskazówka. Dla każdego $p \notin C$ pokazać, że jeśli trajektoria u przechodzi przez pewne małe otoczenie $B_r(p)$, to po pewnym czasie wychodzi i już nie wraca.

Zadanie 1.12. (słabe sformułowanie równania Laplace'a) Niech $g \in C(\mathbb{B}^n)$. Załóżmy, że w klasie funkcji

$$\left\{ v \in C^1(\mathbb{B}^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}^n}) : v|_{\partial\mathbb{B}^n} = g, \int_{\mathbb{B}^n} |\nabla v|^2 dx < \infty \right\}$$

najmniejszą energię Dirichleta $\int_{\mathbb{B}^n} |\nabla u|^2$ ma funkcja u . Wykazać, że

$$\int_{\mathbb{B}^n} \nabla u \nabla \varphi dx = 0 \quad \text{dla wszystkich } \varphi \in C_c^1(\mathbb{B}^n).$$

Jeśli $u \in C^2$, wywnioskować stąd równanie Laplace'a $\Delta u = 0$ w \mathbb{B}^n .

Wskazówka. Rozważyć minimalizację funkcji $t \mapsto \int_{\mathbb{B}^n} |\nabla(u + t\varphi)|^2$.

Zadanie 1.13. Niech $\Phi: H \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągłą wypukłą funkcją na przestrzeni Hilberta H . Dla $u \in H$ definiujemy podróznik $\partial\Phi(u)$ jako zbiór

$$\partial\Phi(u) = \{v \in H : \forall w \in H \ \Phi(u+w) - \Phi(u) \geq \langle v, w \rangle\}.$$

- (a) Wyznaczyć $\partial\Phi(0)$ dla $\Phi(x) = x^2$ oraz $\Phi(x) = |x|$ (tutaj $H = \mathbb{R}$).
- (b) Wykazać, że jeśli $\Phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukłą funkcją klasy C^1 , to $\partial\Phi(u) = \{\nabla\Phi(u)\}$.
- (c) Wykazać, że w ogólności (gdy H jest dowolną przestrzenią Hilberta) $\partial\Phi(u)$ zawsze jest zbiorem niepustym.
- (d) W przypadku $H = L^2(\mathbb{R}^n)$ i $\Phi(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2$ sprawdzić formalnie, że $\partial\Phi(u) = \{-\Delta u\}$.

Wskazówka. W punkcie (c) skorzystać z twierdzenia o oddzielaniu dla zbiorów $\{(x, t) : t > \Phi(x)\}$ i $\{(u, \Phi(u))\}$ w przestrzeni $H \otimes \mathbb{R}$.

Zadanie 1.14. Przekonać się, że operatorem Eulera-Lagrange'a dla funkcjonału

$$E(u) = \int F(\nabla u) \, dx$$

jest $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(\nabla F(\nabla u))$. Innymi słowy, sprawdzić równość

$$\partial_t E(u) = - \int \operatorname{div}(\nabla F(\nabla u)) \cdot \partial_t u \, dx$$

(przy odpowiednich założeniach na regularność u).

Zadanie 1.15. Dla każdego z poniższych równań zwyczajnych wyznaczyć rozwiązanie $u: [0, T) \rightarrow \infty$ na maksymalnym możliwym przedziale określoności:

$$\begin{cases} u' = u \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -u \\ u(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = -u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

W których przypadkach $T = \infty$, a w których $T < \infty$?

Zadanie 1.16. W przypadku, gdy $\mathcal{N} = \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, z równania potoku przekształceń harmoniczych $\partial_t u - \Delta^\top u = 0$ wyprowadzić równanie

$$\partial_t u - \Delta u = |\nabla u|^2 u$$

Rozdział 2

Równanie ciepła

2.1 Wyprowadzenie jądra ciepła

Dla kompletności wywodu wyprowadzimy tu wzór (1.1) na rozwiązanie równania ciepła. Ten podrozdział śmiało można ominąć, ale warto spojrzeć na wprowadzoną tu notację – będzie ona używana w całej reszcie skryptu.

Jeśli znamy już wzór (1.1), to bardzo łatwo jest sprawdzić, że faktycznie daje on rozwiązanie (zadanie 1.1). Tutaj odpowiemy jednak na pytanie, jak do tego wzoru dojść. I znowu, możliwych dróg jest wiele (zob. [Eva10, Ch. 2.3.1a] oraz [Eva10, Ch. 2.5, Pb. 13]), tutaj opisuję zaledwie jedną z nich [Eva10, Ch. 4.3.1b, Ex. 2]).

Założmy, że funkcja u jest rozwiązaniem równania ciepła $(\partial_t - \Delta)u = 0$. Zastosujemy transformatę Fouriera¹ względem współrzędnej przestrzennej:

$$\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx.$$

Wprost z definicji łatwo sprawdzić, że $\mathcal{F}(\partial_{x_k} u) = i\xi_k \mathcal{F}u$ (zadanie 2.1), a stąd

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_{x_k x_k} u) &= i\xi_k \mathcal{F}(\partial_{x_k} u) = -\xi_k^2 \mathcal{F}u, \\ \mathcal{F}(\Delta u) &= -\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \mathcal{F}u = -|\xi|^2 \mathcal{F}u. \end{aligned}$$

Transformatę pochodnej czasowej wyznaczamy (przynajmniej formalnie), wchodząc z różniczkowaniem pod znak całki:

$$\mathcal{F}(\partial_t u) = \partial_t \mathcal{F}u.$$

Oznaczając – zgodnie z utartym zwyczajem – $\mathcal{F}u$ przez \hat{u} , z równania ciepła $(\partial_t - \Delta)u = 0$ wnioskujemy teraz

$$0 = \mathcal{F}((\partial_t - \Delta)u) = \partial_t \hat{u} + |\xi|^2 \hat{u}.$$

Oznacza to, że dla każdego punktu $\xi \in \mathbb{R}^n$ z osobna funkcja $\hat{u}(t, \xi)$ spełnia równanie różniczkowe zwyczajne

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(t, \xi) = -|\xi|^2 \hat{u}(t, \xi), \\ \hat{u}(0, \xi) = \widehat{u_0}(\xi), \end{cases}$$

¹Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), francuski matematyk i fizyk

które łatwo rozwiązujemy: $\hat{u}(t, \xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{u_0}(\xi)$. Pozostaje zastosować odwrotną transformatę Fouriera, by uzyskać jawny wzór na u .

W tym celu przypomnijmy inną podstawową własność: $\mathcal{F}(\rho * u) = \mathcal{F}\rho \cdot \mathcal{F}u$. W naszym przypadku oznacza to, że

$$u = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-t|\xi|^2} \widehat{u_0} \right) = \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-t|\xi|^2} \right) \cdot \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{u_0} \right) = \rho_t * u_0.$$

Oczywiście wymaga to obliczenia transformaty (właściwie: odwrotnej transformaty) funkcji $e^{-t|\xi|^2}$, ale jest to klasyczny rachunek (zadanie 2.2), w wyniku którego uzyskuje się tzw. *jądro ciepła*

$$\rho_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} \exp \left(-\frac{|x|^2}{4t} \right). \quad (2.1)$$

Zależnie od sytuacji, funkcję tę będziemy zapisywać jako $\rho_t(x)$ lub $\rho(t, x)$. Będziemy również używać oznaczenia ρ_t na funkcję dwóch zmiennych $\rho_t(x, y) = \rho_t(x - y)$.

Jądro ciepła nazywane jest również rozwiązaniem fundamentalnym, gdyż spełnia

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \Delta \rho = 0, \\ \rho_0 = \delta_0. \end{cases}$$

Pierwszy z warunków można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Drugi należy rozumieć jako zbieżność $\rho_t \rightarrow \delta_0$ w sensie dystrybucji, a więc w tym przypadku – jako słabą- $*$ zbieżność miar $\rho_t(x) dx \rightarrow d\delta_0(x)$.

Rozwiązanie równania ciepła często będziemy zapisywali przy użyciu notacji półgrupowej:

$$u(t, x) = H_t u_0(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho_t(x - y) u_0(y) dy. \quad (2.2)$$

Rodzina operatorów H_t nazywana jest półgrupą ciepła, a to ze względu na następujące własności:

$$H_0 = \text{id}, \quad H_t H_s = H_{t+s} \quad \text{dla } t, s > 0.$$

Pierwsza jest oczywista – odpowiada rozwiązaniu równania ciepła z danymi początkowymi u_0 , a następnie ewaluowaniu rozwiązania dla $t = 0$. Druga odpowiada wystartowaniu od u_0 i *odczekaniu* czasu s (zgodnie z ewolucją zadaną przez równanie ciepła), a następnie wystartowaniu od otrzymanej funkcji i *odczekaniu* czasu t . Zgodnie z fizyczną intuicją, powinno to dać ten sam wynik co wystartowanie od u_0 i odczekanie czasu $t + s$. Ścisłe uzasadnienie opiera się albo na jednoznaczności rozwiązań (co jest możliwe przy dodatkowych założeniach, zob. zadania 1.3, 1.4), albo na bezpośrednim rachunku (zadania 2.3, 2.8).

2.2 Podstawowe własności rozwiązań

Twierdzenie 2.1. *Niech $u_0 \in C_b(\mathbb{R}^n)$ będzie ograniczoną funkcją ciągłą. Wówczas funkcja u zadana wzorem $u(t, x) = \rho_t * u_0(x)$ (1.1) ma następujące własności:*

- (a) jest gładka w obszarze $(0, \infty) \times \mathbb{R}^n$;
- (b) spełnia w tym obszarze równanie ciepła $(\partial_t - \Delta)u = 0$;

(c) przedłuża się do funkcji ciągłej na $[0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ wzorem $u(0, x) = u_0(x)$.

Dowód. (a) Gdy ustalimy $0 < \lambda < \Lambda < \infty$, to możemy się przekonać, że każda pochodna $D^\alpha \rho$ (dla dowolnego wielowskaźnika α) na $[\lambda, \Lambda] \times \mathbb{R}^n$ szybko zanika w nieskończoności, co uzasadnia możliwość przejścia z pochodną pod znak całki, co daje $D^\alpha u = (D^\alpha \rho) * u_0$ na tym obszarze.

(b) Z punktu (a) wiemy, że $(\partial_t - \Delta)u = ((\partial_t - \Delta)\rho) * u_0$, a więc problem sprowadza się do tożsamości $(\partial_t - \Delta)\rho = 0$, łatwej do sprawdzenia poprzez bezpośredni rachunek.

(c) Załóżmy, że $|u_0| \leq C$ na \mathbb{R}^n . Wówczas dla ustalonego punktu $(0, x_0)$ mamy

$$\begin{aligned} |u(t, x) - u_0(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_t(x-y)(u_0(y) - u_0(x_0)) \, dy \right| \\ &\leq \int_{|x-y| \leq \delta} \rho_t(x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)| \, dy \\ &\quad + \int_{|x-y| \geq \delta} \rho_t(x-y)|u_0(y) - u_0(x_0)| \, dy \\ &\leq \max_{|x-y| \leq \delta} |u_0(y) - u_0(x_0)| + 2C \int_{|x-y| \geq \delta} \rho_t(x-y) \, dy. \end{aligned}$$

Dla zadanego $\varepsilon > 0$ dobierzmy $\delta > 0$ takie, by dla $|x - x_0| \leq \delta$ pierwszy wyraz był ograniczony przez $\varepsilon/2$. Następnie dobierzmy $\delta' > 0$ na tyle małe, by dla $t < \delta'$ ostatnia z całek była ograniczona przez $\varepsilon/4C$. Wówczas $|u(t, x) - u_0(x_0)| \leq \varepsilon$ dla $|x - x_0| \leq \delta$ i $t < \delta'$, co dowodzi ciągłości podanego przedłużenia w punkcie $(0, x_0)$. \square

Odnajmy jeszcze następującą własność związaną z tzw. *skalowaniem parabolicznym*:

Stwierdzenie 2.2. *Jeśli funkcja u jest rozwiązaniem równania ciepła $(\partial_t - \Delta)u = 0$, to jest nim również funkcja*

$$u_\lambda(t, x) := u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

dla dowolnego $\lambda > 0$.

Fakt ten jest niezwykle łatwy do wykazania (zob. zadanie 2.4) – opiera się na obserwacji, że w równaniu pojawia się *pierwsza* pochodna po t i *drugie* pochodne po x – a jednak jest niezwykle użyteczny. W szczególności pozwala pewne lokalne oszacowania (dla małych $t > 0$ i/lub po małych kulach $B_r(x)$) sprowadzać do oszacowań w jednej skali (dla $t = 1$ i/lub po kuli $B_1(0)$).

Odtąd będziemy używać oznaczenia $H_t f := \rho_t * f$ (2.2) na rozwiązanie równania ciepła. W tym kontekście Stwierdzenie 2.2 warto uzupełnić o pokrewną obserwację: jeśli $u = H_t f$, to $u_\lambda = H_t f_\lambda$ (przy oznaczeniu $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$).

Stwierdzenie 2.3. *Jeśli f jest funkcją ograniczoną, to*

$$\|\nabla H_t f\|_\infty \lesssim t^{-1/2} \|f\|_\infty.$$

Gdy f jest klasy C^1 , powyższe oszacowanie może być poprawione, ponieważ wówczas $\nabla H_t f = H_t(\nabla f)$ (zadania 2.6, 2.7).

Dowód. Obliczmy najpierw pochodne ρ_t : $\nabla \rho_t = -\frac{y}{2t} \rho_t$. Pozwala to oszacować pochodne $H_t f$ następująco:

$$|\nabla H_t f(x)| = \left| \int \nabla \rho_t(y) f(x-y) dy \right| \leq \|f\|_\infty \int \frac{|y|}{t} \rho_t(y) dy$$

Ostatnia całka jest rzędu $t^{-1/2}$, co nietrudno sprawdzić bezpośrednio (zob. zadanie 2.5).

W ramach alternatywnego uzasadnienia zauważmy najpierw, że całka ta jest skończona dla $t = 1$, co dowodzi jednego szczególnego przypadku. Aby przejść do przypadku ogólnego, rozważmy funkcje $u(t, \cdot) = H_t f$, f_λ i u_λ jak wyżej. Wówczas dla $\lambda = \sqrt{t}$ wiemy, że

$$|\nabla u_\lambda(1, x)| \lesssim \|f_\lambda\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

a jednocześnie $|\nabla u_\lambda(1, x)| = \lambda |\nabla u(\lambda^2, \lambda x)|$. Uzyskaliśmy więc żadaną nierówność

$$|\nabla u(t, \lambda x)| \lesssim t^{-1/2} \|f\|_\infty.$$

□

2.3 Równanie niejednorodne i wzór Duhamela

Zwróćmy teraz uwagę na tzw. niejednorodne równanie ciepła, czyli równanie postaci

$$(\partial_t - \Delta)u = f$$

dla zadanej funkcji $f(t, x)$. Wiemy, że dla $f \equiv 0$ rozwiązanie u jest gładkie; przekonamy się, że w ogólności u posiada dwie pochodne więcej niż f .

Ścisłe sformułowania twierdzeń dla funkcji $u: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wymagają założeń o gładkości (np. ciągłości u) oraz założeń o ograniczoności (np. $\|u\|_\infty < \infty$ lub $\|u\|_1 < \infty$). Trudno objąć jednym sformułowaniem wszystkie interesujące sytuacje, dlatego ograniczę się do dość nieściślych założeń typu *u jest odpowiednio regularna*.

Dla uproszczenia wywodu, w dalszych zastosowaniach będziemy przyjmować, że u jest funkcją ciągłą lub gładką, która jest 1-okresowa względem każdej ze współrzędnych przestrzennych x_1, \dots, x_n . Innymi słowy, będziemy pracowali na torusie. Techniczne szczegóły poniższych twierdzeń łatwo uzupełnić w tej ogólności.

Głównym narzędziem będzie tzw. wzór Duhamela²:

Lemat 2.4. *Załóżmy, że $u(t, x)$ jest odpowiednio regularną funkcją i oznaczmy pomocniczo $u_t(x) := u(t, x)$. Wówczas*

$$\partial_t(H_{s-t}u_t) = H_{s-t}((\partial_t - \Delta)u_t) \quad \text{dla } 0 < t < s.$$

²Jean-Marie Constant Duhamel (1797-1872), francuski matematyk i fizyk

Dowód. Zróżniczkujemy pod znakiem całki:

$$\begin{aligned}
\partial_t(H_{s-t}u_t)(x) &= \partial_t \int \rho_{s-t}(x-y)u_t(y) dy \\
&= \int \rho_{s-t}(x-y)\partial_t u_t(y) - (\partial_t \rho)_{s-t}(x-y)u_t(y) dy \\
&= \int \rho_{s-t}(x-y)\partial_t u_t(y) - \Delta \rho_{s-t}(x-y)u_t(y) dy \\
&= \int \rho_{s-t}(x-y)\partial_t u_t(y) - \rho_{s-t}(x-y)\Delta u_t(y) dy \\
&= H_{s-t}((\partial_t - \Delta)u_t)(x)
\end{aligned}$$

Użyte niżej oznaczenie $(\partial_t \rho)_{s-t}$ służy odróżnieniu od $\partial_t(\rho_{s-t})$, czyli od pochodnej złożenia

Przedostatnie przejście można rozumieć jako efekt dwukrotnego całkowania przez części, lub alternatywnie jako konsekwencję następującego rachunku (zob. zadanie 2.6):

$$\begin{aligned}
\int \Delta \rho_{s-t}(x-y)u_t(y) dy &= (\Delta \rho_{s-t}) * u_t(x) \\
&= \Delta(\rho_{s-t} * u_t)(x) \\
&= \rho_{s-t} * \Delta u_t(x) \\
&= \int \rho_{s-t}(x-y)\Delta u_t(y) dy.
\end{aligned}$$

□

Wniosek 2.5. *Jeśli $u(t, x)$ jest dostatecznie regularną funkcją, to*

$$u(s, x) = H_s u_0(x) + \int_0^s H_{s-t}((\partial_t - \Delta)u_t) dt.$$

Dowód. Scałkujemy wzór Duhamela $\partial_t(H_{s-t}u_t) = H_{s-t}((\partial_t - \Delta)u_t)$ od $t = 0$ do $t = s$:

$$\int_0^s H_{s-t}((\partial_t - \Delta)u_t) dt = H_{s-t}u_t \Big|_{t=0}^{t=s} = H_{s-s}u_s - H_{s-0}u_0 = u_s - H_s u_0.$$

Zauważmy, że na potrzeby tego rachunku wystarczy, by funkcja $t \mapsto H_{s-t}u_t(x)$ była ciągła na $[0, s]$ i różniczkowalna w sposób ciągły w $(0, s)$. Zbieżność $H_{s-t}u_t(x) \xrightarrow{t \rightarrow s} u_s(x)$ łatwo zweryfikować przy odpowiednich założeniach na u . □

Wniosek 2.6. *Jeśli funkcje $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ i $f: (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ są odpowiednio regularne, to funkcja*

$$u(t, x) = H_t u_0(x) + \int_0^t H_{t-r} f_r(x) dr$$

spełnia niejednorodne równanie ciepła

$$\begin{cases}
(\partial_t - \Delta)u(t, x) = f(t, x) & \text{dla } t > 0, \\
u(0, x) = u_0(x).
\end{cases}$$

Dowód. Fakt ten można zweryfikować bezpośrednio [Eva10, Ch. 2.3.1c, Thm. 2] lub wywnioskować z poprzedniego wniosku. Wiemy mianowicie, że funkcja

$$v(t, x) = (\partial_t - \Delta)u(t, x) - f(t, x)$$

spełnia $\int_0^s H_{s-t}v_t(x) dt = 0$ dla dowolnych $s > 0$ i $x \in \mathbb{R}^n$. W granicy $s \rightarrow 0$ odczytujemy, że $v \equiv 0$. □

Żeby usprawiedliwić zastosowanie Wniosku 2.5, powinniśmy najpierw uzasadnić regularność u , więc te dwa podejścia nie różnią się znacząco.

2.4 Regularność rozwiązań

Jak odnotowaliśmy już wcześniej, rozwiązania równania ciepła $(\partial_t - \Delta)u = 0$ są gładkie. Oczywiście pochodne u mogą być bardzo duże dla $t \approx 0$, jeśli u_0 jest mało regularne (zob. Stwierdzenie 2.3).

Dla równania niejednorodnego $(\partial_t - \Delta)u = f$ sytuacja jest inna – z oczywistych względów jeśli funkcja f nie jest gładka, to u również nie może być gładka. Przez analogię do równania Laplace'a $-\Delta u = f$ (które można traktować jako szczególny przypadek równania ciepła) możemy się jednak spodziewać, że u posiada dwie pochodne więcej niż f .

Intuicję tę potwierdzają tzw. oszacowania Schauderowskie³. Są one sformułowane w języku pónormy Höldera:

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad \text{dla } 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Uwaga: Warunek Höldera uzupełnia skalę regularności C^k o pośrednie klasy $C^{k,\alpha}$: funkcja u należy do $C^{k,\alpha}$, jeśli należy do C^k , a jej wszystkie pochodne rzędu k należą do $C^{0,\alpha}$.
 $C^{k,0} = C^k$, ale $C^{k,1} \neq C^{k+1}$

Stwierdzenie 2.7. Niech u będzie rozwiązaniem niejednorodnego równania ciepła $(\partial_t - \Delta)u = f$ zadanym wzorem Duhamela $u_t = \int_0^t H_{t-r} f_r \, dr$. Wówczas:

Symbolu \lesssim używam do zakomunikowania nierówności typu $\leq C(n) \dots$, więc tutaj osobno zaznaczam zależność od α

(a) jeśli $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, to $u_t \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ dla każdego $0 \leq \alpha < 1$,

$$\|\nabla u\|_{C^{0,\alpha}} \lesssim C(\alpha) t^{(1-\alpha)/2} \|f\|_{L^\infty};$$

(b) jeśli $f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ i $0 < \alpha \leq 1$, to $u_t \in C^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\nabla^2 u_t\|_{L^\infty} \lesssim C(\alpha) t^{\alpha/2} \|f\|_{C^{0,\alpha}}.$$

Najbardziej użyteczne i satysfakcjonujące byłoby sformułowanie $f \in C^0 \Rightarrow u_t \in C^2$. Niestety, jest ono nieprawdziwe już w przypadku eliptycznym: z ciągłości Δu nie wynika ciągłość u (zob. [GT01, Pb. 4.9] i zadanie 2.9). Wynika stąd potrzeba użycia innych przestrzeni funkcyjnych.

W interesujących nas zastosowaniach można przyjąć α np. jako równe $1/2$.

Dowód. (a) Wchodząc z różniczkowaniem pod znak całki, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla u(t, x) &= \int_0^t \nabla H_{t-r} f_r(x) \, dr = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \rho_{t-r}(x-y) f_r(y) \, dy \, dr, \\ \nabla u(t, x) - \nabla u(t, x') &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \rho_{t-r}(x-y) - \nabla \rho_{t-r}(x'-y)) f_r(y) \, dy \, dr. \end{aligned}$$

³Juliusz Schauder (1899-1943), polski matematyk

Możliwość różniczkowania pod znakiem całki jest niejako uzasadniana przez dalszy rachunek.

Dla ustalonego $r \in (0, t)$ zbadajmy więc wewnętrzną całkę, korzystając z ograniczenia na f oraz podstawienia $y = z\sqrt{t-r}$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \rho_{t-r}(x-y) - \nabla \rho_{t-r}(x'-y)) f_r(y) dy \right| \\ & \leq \|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \rho_{t-r}(x-y) - \nabla \rho_{t-r}(x'-y)| dy \\ & = \|f\|_{L^\infty} \cdot (t-r)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \rho_1 \left(\frac{x}{\sqrt{t-r}} - z \right) - \nabla \rho_1 \left(\frac{x'}{\sqrt{t-r}} - z \right) \right| dz \\ & = \|f\|_{L^\infty} \cdot (t-r)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \rho_1 \left(z + \frac{x-x'}{\sqrt{t-r}} \right) - \nabla \rho_1(z) \right| dz. \end{aligned}$$

Przedostatnie przejście opiera się na równości $\rho_{t-r}(y) = (t-r)^{-n/2} \rho_1(z)$, która po zróżniczkowaniu daje $\nabla \rho_{t-r}(y) = (t-r)^{-1/2} \cdot (t-r)^{-n/2} \nabla \rho_1(z)$. Funkcję podcałkową możemy teraz oszacować na dwa sposoby: przez drugie pochodne ρ lub naiwnie przy pomocy nierówności trójkąta:

$$\begin{aligned} \left| \nabla \rho_1 \left(z + \frac{x-x'}{\sqrt{t-r}} \right) - \nabla \rho_1(z) \right| & \leq \frac{|x-x'|}{\sqrt{t-r}} \int_0^1 \left| \nabla^2 \rho_1 \left(z + \frac{\beta(x-x')}{\sqrt{t-r}} \right) \right| d\beta \\ & \text{lub} \leq \left| \nabla \rho_1 \left(z + \frac{x-x'}{\sqrt{t-r}} \right) \right| + |\nabla \rho_1(z)|. \end{aligned}$$

Scałkowanie powyższych po \mathbb{R}^n daje odpowiednio:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla \rho_1 \left(z + \frac{x-x'}{\sqrt{t-r}} \right) - \nabla \rho_1(z) \right| dz & \leq C(n) \frac{|x-x'|}{\sqrt{t-r}}, \\ & \text{lub} \leq C(n). \end{aligned}$$

Całka ta jest też więc ograniczona przez średnią geometryczną tych dwóch ograniczeń, czyli przez $C(n) \left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{t-r}} \right)^\alpha$ dla dowolnego $0 \leq \alpha \leq 1$. Możemy teraz podstawić ten

W którym momencie dowodu $\alpha = 1$ przestaje działać?

wynik do poprzednich oszacowań i scałkować po wszystkich $0 < r < t$:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\nabla \rho_{t-r}(x-y) - \nabla \rho_{t-r}(x'-y)) f_r(y) dy \right| \\ & \leq \|f\|_{L^\infty} \cdot (t-r)^{-1/2} \cdot C(n) \left(\frac{|x-x'|}{\sqrt{t-r}} \right)^\alpha, \\ & |\nabla u(t, x) - \nabla u(t, x')| \\ & \leq C(n) \|f\|_{L^\infty} |x-x'|^\alpha \int_0^t (t-r)^{-\frac{1+\alpha}{2}} dr \\ & = C(n) \|f\|_{L^\infty} |x-x'|^\alpha \cdot \frac{t^{(1-\alpha)/2}}{(1-\alpha)/2}. \end{aligned}$$

Można prześledzić, że ostateczna stała ma postać $C(n)/(1-\alpha)$.

(b) Wchodząc z różniczkowaniem pod znak całki, otrzymujemy

$$\nabla^2 u(t, x) = \int_0^t \nabla^2 H_{t-r} f_r(x) dr = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^2 \rho_{t-r}(x-y) f_r(y) dy dr$$

Przejsie z różniczkowaniem pod znak całki jest tutaj nieuprawnione. Da się jednak uzupełnić odpowiednie szczegóły – jest to treścią zadania 2.10.

Dla ustalonego $r \in (0, t)$ zbadajmy więc wewnętrzną całkę. Ponieważ $\nabla^2 \rho_{t-r}$ całkuje się do zera (jako pochodna), możemy odjąć stałą $f_r(x)$ i otrzymać

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^2 \rho_{t-r}(x-y) f_r(x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^2 \rho_{t-r}(x-y) (f_r(y) - f_r(x)) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 \rho_{t-r}(x-y)| \cdot |f_r(y) - f_r(x)| dy \\ &\leq \|f\|_{C^{0,\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 \rho_{t-r}(x-y)| \cdot |x-y|^\alpha dy \\ &= \|f\|_{C^{0,\alpha}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 \rho_{t-r}(y)| \cdot |y|^\alpha dy. \end{aligned}$$

Otrzymana całka zależy już wyłącznie od $t-r$; zależność tę najłatwiej prześledzić przez podstawienie $y = z\sqrt{t-r}$. Ponieważ $\rho_{t-r}(y) = (t-r)^{-n/2} \rho_1(z)$, dwukrotne różniczkowanie daje $\nabla^2 \rho_{t-r}(y) = (t-r)^{-1} \cdot (t-r)^{-n/2} \nabla^2 \rho_1(z)$ i w rezultacie

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla^2 \rho_{t-r}(y)| \cdot |y|^\alpha dy &= \int_{\mathbb{R}^n} (t-r)^{-1} |\nabla^2 \rho_1(z)| \cdot (t-r)^{\alpha/2} |z|^\alpha dz \\ &= C(n, \alpha) (t-r)^{\frac{\alpha}{2}-1}. \end{aligned}$$

Możemy teraz otrzymany wynik scałkować po wszystkich $0 < r < t$:

$$|\nabla^2 u(t, x)| \leq \int_0^t \|f\|_{C^{0,\alpha}} \cdot C(n, \alpha) (t-r)^{\frac{\alpha}{2}-1} dr = C(n, \alpha) \|f\|_{C^{0,\alpha}} \cdot \frac{t^{\alpha/2}}{\alpha/2},$$

co daje nam żądane oszacowanie. Można prześledzić, że ostateczna stała ma postać $C(n)/\alpha$. \square



W przypadku, który będzie nas interesować, twierdzenie o regularności można sformułować bardzo zwięźle i bez użycia warunku Höldera. Metoda dowodu polega na iterowaniu powyższych dwóch oszacowań: poprawa regularności lewej strony niesie za sobą poprawę regularności prawej strony, i tak w kółko. Stąd też nazwa tej metody – *bootstrapping*.

Twierdzenie 2.8. *Załóżmy, że funkcja $F(x, p, q)$ ma ograniczone (niekoniecznie wspólne) pochodne wszystkich rzędów. Niech $u: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie rozwiązaniem równania*

$$(\partial_t - \Delta)u(t, x) = F(x, u(t, x), \nabla u(t, x))$$

zadany wzorem Duhamela i załóżmy, że $|u|, |\nabla u| \leq C$. Wówczas u jest gładkie.

Dowód. Jeśli prawą stronę równania oznaczmy przez f , to wzór Duhamela daje nam $u_t = H_t u_0 + \int_0^t H_{s-r} f_r dr$. Dla uproszczenia zapisu przyjmijmy, że $u_0 \equiv 0$, a więc $u_t = \int_0^t H_{s-r} f_r dr$.

Według podanych założeń prawa strona równania f jest funkcją ograniczoną. Ze Stwierdzenia 2.7a wnioskujemy więc, że $u_t \in C^{1,1/2}(\mathbb{R}^n)$, z jednostajnym ograniczeniem na normę (ustaliliśmy tu $\alpha := 1/2$). To z kolei oznacza, że $f \in C^{0,1/2}(\mathbb{R}^n)$. Ze Stwierdzenia 2.7b otrzymujemy zatem, że $u_t \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Przy tym założeniu f jest funkcją klasy C^1 , więc możemy zróżniczkować równanie stronami, uzyskując

$$(\partial_t - \Delta)\partial_k u = \partial_{x_k} F + \partial_p F \cdot \partial_k u(t, x) + \sum_{j=1}^n \partial_{q_j} F \cdot \partial_{jk} u;$$

innymi słowy, funkcja $\tilde{u} = \partial_k u$ spełnia równanie

$$(\partial_t - \Delta)\tilde{u} = \tilde{F}(x, u, \tilde{u}, \nabla \tilde{u})$$

ze zmodyfikowaną funkcją \tilde{F} . Pozostaje zastosować to samo rozumowanie dla \tilde{u} , itd.

Można to przejście ściśle uzasadnić, ale łatwiej jest przeprowadzić podobne rozumowanie dla wzoru Duhamela: tożsamość $u_t = \int_0^t H_{s-r} f_r dr$ różniczkujemy stronami, uzyskując $\partial_{x_j} u_t = \int_0^t H_{s-r}(\partial_{x_j} f_r) dr$.

W ten sposób znaleźliśmy się w punkcie wyjścia: funkcja \tilde{u} spełnia $|\tilde{u}|, |\nabla \tilde{u}| \leq C$ i odpowiedni wzór Duhamela. Możemy teraz powtórzyć poprzednie rozumowanie (dodatkowa zależność \tilde{F} od u nic tu nie zmienia), uzyskując $\tilde{u} \in C^2$, a więc $u \in C^3$. Iterując, otrzymujemy dowolnie wysoką regularność u .

Pozostaje jeszcze rozważyć niezerowe dane początkowe u_0 . Gdy u_0 ma ograniczone pochodne, rozumowanie pozostaje bez zmian – zastosowanie Stwierdzenia 2.7 daje co prawda oszacowanie na funkcję $u_t - H_t u_0$, ale ze względu na regularność $H_t u_0$ wnioskujemy stąd bezpośrednio odpowiednie oszacowanie na u_t . W ogólnym przypadku, gdy u_0 jest (powiedzmy) zaledwie funkcją całkowalną, należy ograniczyć się do szacowania u na zbiorze $[\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n$ (gdzie $\varepsilon > 0$ można wybrać małe). Jest to możliwe, gdyż $H_t u_0$ jest funkcją gładką dla $t > 0$, z pochodnymi ograniczonymi na $[\varepsilon, T] \times \mathbb{R}^n$ \square

Gdzie tkwi haczyk przy różniczkowaniu równania $(\partial_t - \Delta)u = f$ stronami?

Alternatywnie można zauważyć, że funkcja $u_t - H_t u_0$ spełnia równanie bardzo podobne do tego dla u_t .

2.5 Zadania

Zadanie 2.1. Dla transformaty Fouriera

$$\mathcal{F}u(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, \xi \rangle} u(x) dx$$

wyprowadzić następujące podstawowe własności:

$$\mathcal{F}(\partial_{x_k} u) = i\xi_k \mathcal{F}u, \quad \mathcal{F}(x_k u) = i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}u, \quad \mathcal{F}(\rho * u) = \mathcal{F}\rho \cdot \mathcal{F}u.$$

Zadanie 2.2. Wykazać, że funkcja $g = \mathcal{F}(e^{-x^2})$ spełnia równanie różniczkowe zwyczajne

$$g'(\xi) = -\frac{\xi}{2}g(\xi), \quad g(0) = \sqrt{\pi}.$$

Wynioskować, że dla każdego $a > 0$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x, \xi \rangle} e^{-a|x|^2} dx = (\pi/a)^{n/2} e^{-|\xi|^2/4a}.$$

Zadanie 2.3. Sprawdzić bezpośrednio z definicji, że rodzina operatorów H_t zadana wzorem 2.2 faktycznie spełnia warunek półgrupowy $H_t H_s = H_{t+s}$.

Zadanie 2.4. Jeśli funkcja u jest rozwiązaniem równania ciepła $(\partial_t - \Delta)u = 0$, to jest nim również funkcja

$$u_\lambda(t, x) := u(\lambda^2 t, \lambda x)$$

dla dowolnego $\lambda > 0$. Ponadto jeśli $u = H_t f$, to $u_\lambda = H_t f_\lambda$.

Zadanie 2.5. Sprawdzić, że

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|}{t} \rho_t(y) dy = C(n) t^{-1/2}$$

dla pewnej stałej $C(n)$ zależnej jedynie od wymiaru.

Zadanie 2.6. Niech $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy C^1 (powiedzmy, że o ograniczonej pochodnej). Wówczas $\nabla H_t f = H_t(\nabla f)$.

Zadanie 2.7. Załóżmy, że $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ posiada słabą pochodną $\partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Oznacza to, że spełniona jest równość

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_j \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x) \varphi(x) dx \quad \text{dla wszystkich } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Wykazać, że również wówczas $\partial_j H_t f = H_t(\partial_j f)$.

Zadanie 2.8. Korzystając ze wzoru Duhamela $\partial_t H_{s-t} f_t = H_{s-t}((\partial_t - \Delta)f_t)$, wyprowadzić własność półgrupową $H_t H_s = H_{t+s}$.

Zadanie 2.9. Niech $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie jednorodnym wielomianem harmonicznym stopnia 2, np. $P(x, y) = x^2 - y^2$. Ustalmy też funkcję wycinającą:

$$\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \eta \equiv 1 \text{ na } B_1, \quad \eta \equiv 0 \text{ poza } B_2,$$

ciąg $t_k = 2^k$ oraz rozbieżny szereg $\sum c_k = \infty$ o wyrazach $c_k \searrow 0$, np. $c_k = \frac{1}{k}$. Zdefiniujmy funkcję

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Delta(\eta P)(t_k x).$$

Wykazać, że funkcja f jest ciągła, ale równanie $\Delta u = f$ nie posiada rozwiązania klasy C^2 na otoczeniu zera.

Wskazówka. Zacząć od sprawdzenia jednego narzucającego się kandydata na rozwiązanie.

Zadanie 2.10. (uzupełnienie dowodu Stwierdzenia 2.7) Załóżmy, że $f \in C^{0,\alpha}$ dla pewnego $0 < \alpha < 1$. Wykazać, że funkcja $u_t = \int_0^t H_{t-r} f_r dr$ jest klasy $C^2(\mathbb{R}^n)$ i spełnia

$$\nabla^2 u_t(x) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^2 \rho_{t-r}(x-y) (f_r(y) - f_r(x)) dy dr.$$

Wskazówka. Rozważyć funkcje $u_t^\varepsilon := \int_0^{t-\varepsilon} H_{t-r} f_r dr$.

Rozdział 3

Uzupełnienie wiedzy z geometrii różniczkowej

3.1 Podrozumności przestrzeni euklidesowej

Definicja 3.1. Zbiór $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ nazwiemy gładką podrozumnością wymiaru m , jeśli dla każdego punktu $p \in \mathcal{M}$ istnieje otoczenie otwarte $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz gładki dyfeomorfizm $\Phi: U \rightarrow \mathbb{B}^n$, dla którego

$$\Phi(\mathcal{M} \cap U) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathbb{B}^n.$$

Innymi słowy, podrozumność to zbiór, który lokalnie można gładko wyprostować. Podana tu definicja ma tę zaletę, że można w niej podmienić \mathbb{R}^n na \mathcal{N} i bez żadnych modyfikacji otrzymać definicję podrozumności $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ dowolnej rozumności gładkiej \mathcal{N} . Dla pełnej jasności przytoczę też jednak różne alternatywne definicje.

Podrozumności \mathbb{R}^n można definiować na różne równoważne sposoby. Równoważność tych charakteryzacji bywa przydatna; elementarne omówienie różnych definicji można znaleźć w skrypcie Pawła Strzeleckiego [Str12].

Twierdzenie 3.2. Dla zbioru $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ następujące sformułowania są równoważne:

- (a) \mathcal{M} jest gładką podrozumnością wymiaru m ;
- (b) lokalnie \mathcal{M} jest wykresem gładkiej funkcji niektórych m spośród n zmiennych, to znaczy dla każdego $p \in \mathcal{M}$ istnieje otoczenie otwarte $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, m -wymiarowa podprzestrzeń liniowa $P = \text{lin}(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$ (rozpięta na niektórych wektorach bazy standardowej), zbiór otwarty $V \subseteq P$ oraz funkcja gładka $\varphi: P \supseteq V \rightarrow P^\perp$ spełniająca

$$\mathcal{M} \cap U = (\text{wykres } \varphi) \cap U.$$

- (c) lokalnie \mathcal{M} jest poziomicyą gładkiej submersji, to znaczy dla każdego $p \in \mathcal{M}$ istnieje otoczenie otwarte $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcja gładka $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, dla której różniczka DF jest wszędzie pełnego rzędu, a ponadto

$$\mathcal{M} \cap U = F^{-1}(0).$$

(d) lokalnie \mathcal{M} jest obrazem immersji, to znaczy dla każdego $p \in \mathcal{M}$ istnieje otoczenie otwarte $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ oraz funkcja gładka $f: \mathbb{B}^m \rightarrow U$, dla której różniczka Df jest wszędzie pełnego rzędu, a ponadto

$$\mathcal{M} \cap U = f(\mathbb{B}^m).$$

Wspomnijmy jeszcze, czym są funkcje gładkie na podrozmaitości.

Definicja 3.3. Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ i U będą jak w poprzedniej definicji. Wówczas funkcję $f: \mathcal{M} \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy gładką, jeśli

$$f \circ \Phi^{-1}: (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

jest gładką funkcją z (podzbioru) \mathbb{R}^m w \mathbb{R} . W ogólności, funkcja $f: \mathcal{M} \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}$ określona na otwartym podzbiórze $V \subseteq \mathcal{M}$ jest gładka, jeśli jest lokalnie gładka.

Równoważnie, funkcja $f: \mathcal{M} \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka, jeśli przedłuża się do funkcji gładkiej $\bar{f}: W \rightarrow \mathbb{R}$ na otwartym podzbiórze $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$ (zadanie 3.1).

Strukturę gładką na abstrakcyjnej rozmaitości można definiować właśnie poprzez wskazanie funkcji gładkich $f: \mathcal{M} \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}$ na otwartych podzbiórach $V \subseteq \mathcal{M}$ (zadanie 3.2).

Gładkość funkcji w podrozmaitość jest dużo łatwiej zdefiniować – po prostu funkcję w \mathcal{M} uznajemy za gładką, jeśli jest ona gładka jako funkcja o wartościach w \mathbb{R}^n .

Dla uniknięcia nieporozumień warto jeszcze wspomnieć, że funkcje $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ można różniczkować w kierunkach stycznych:

Stwierdzenie 3.4. Niech $p \in \mathcal{M}$ będzie punktem na podrozmaitości $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, $v \in T_p\mathcal{M}$ wektorem stycznym w p , a $f: \mathcal{M} \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}$ funkcją gładką na pewnym otoczeniu p . Wówczas dowolna z poniższych operacji daje ten sam wynik, oznaczany przez $\nabla_v f_p$:

(a) $\left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0}$, gdzie $c: (-1, 1) \rightarrow \mathcal{M}$ jest dowolną krzywą gładką spełniającą $c(0) = p$ i $c'(0) = v$;

(b) $\sum_{j=1}^n v^j \partial_j \bar{f}(p)$, gdzie $\bar{f}: W \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolnym przedłużeniem f na otwarty podzbiór $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$.

Jak widać w powyższym stwierdzeniu i poniższym dowodzie, pojęcie pochodnej kierunkowej jest bardzo użyteczne. Można się nim posłużyć, by zdefiniować wektory styczne do abstrakcyjnej rozmaitości gładkiej (zadanie 3.3).

Dowód. Niech c będzie dowolną krzywą jak w (a), a \bar{f} dowolnym przedłużeniem jak w (b). Wówczas funkcje $f(c(t))$ i $\bar{f}(c(t))$ się pokrywają, ze wzoru na pochodną złożenia mamy więc

$$\left. \frac{d}{dt} f(c(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \bar{f}(c(t)) \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n (c'(0))^j \partial_j \bar{f}(p) = \sum_{j=1}^n v^j \partial_j \bar{f}(p).$$

Początkowa postać nie zależy od wyboru \bar{f} , a końcowa postać nie zależy od wyboru c . W konsekwencji wynik jest niezależny od jednego i drugiego wyboru. \square

3.2 Twierdzenie o otoczeniu tubularnym

Inaczej sformułowany dowód tego twierdzenia można znaleźć w skrypcie Pawła Strzeleckiego [Str12, Tw. 6.18].

Twierdzenie 3.5. *Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zwartą m -wymiarową gładką podrozmaitością. Wówczas istnieje $\varepsilon > 0$, dla którego otoczenie tubularne*

$$\mathcal{M}_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \mathcal{M}) < \varepsilon\}$$

posiada następujące własności:

- (a) Dla każdego punktu $x \in \mathcal{M}_\varepsilon$ istnieje jednoznaczny punkt na rozmaitości $y \in \mathcal{M}$ najbliższy x .
- (b) Przyporządkowanie $\pi(x) = y$ jest gładkie.
- (c) Otoczenie tubularne \mathcal{M}_ε jest sumą rozłączną dysków

$$D^\perp(y, \varepsilon) = \{y + v : v \in T_y^\perp \mathcal{M}, |v| < \varepsilon\} \quad (y \in \mathcal{M}).$$

Dowód. REDUKCJA PROBLEMU.

Dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ funkcja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(y) = |y - x|^2$ jest ciągła (nawet gładka), więc dzięki zwartości \mathcal{M} funkcja $f|_{\mathcal{M}}$ posiada **co najmniej jeden** punkt minimalny $y \in \mathcal{M}$. Oczywiście $f(y) < \varepsilon^2$, czyli $\|y - x\| < \varepsilon$. W punkcie minimalnym mamy $\nabla f(y) \perp T_y \mathcal{M}$, skąd odczytujemy, że $x - y \in T_y^\perp \mathcal{M}$. Połączenie tych dwóch faktów oznacza, że x leży w $D^\perp(y, \varepsilon)$.

Wykazaliśmy więc, że otoczenie tubularne \mathcal{M}_ε jest sumą wszystkich $D^\perp(y, \varepsilon)$. Do dowodu (c) brakuje nam, by uzasadnić rozłączność tych dysków. Rozłączność ta oznaczać będzie również jednoznaczność $y \in \mathcal{M}$ minimalizującego odległość od x , czyli punkt (a). Jeśli dwa dyski $D^\perp(y_1, \varepsilon)$, $D^\perp(y_2, \varepsilon)$ się przecinają, to $|y_1 - y_2| < 2\varepsilon$, wystarczy więc przeprowadzić lokalne rozumowanie.

O dalszej części dowodu można myśleć jako o wzmocnieniu definicji podrozmaitości. Według tej definicji dla każdego $y \in \mathcal{M}$ istnieje dyfeomorfizm otoczenia $y \in \mathbb{R}^n$, dla którego obrazem \mathcal{M} jest fragment podprzestrzeni $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. Pokażemy, że ów dyfeomorfizm można wybrać w taki sposób, by przeprowadzał wektory normalne do \mathcal{M} na wektory normalne do $\mathbb{R}^m \times \{0\}$.

KONSTRUKCJA REPERU.

Ustalmy parametryzację $u: \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \mathcal{M}$ pewnego otoczenia $y \in \mathcal{M}$. Skonstruujemy rodzinę pól wektorowych $v_1, \dots, v_n: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, która dla każdego $p \in U$ tworzy bazę ortonormalną \mathbb{R}^n , przy czym v_1, \dots, v_m tworzą bazę $T_{u(p)} \mathcal{M}$ (taką rodzinę nazywamy *reperem*), a v_{m+1}, \dots, v_n tworzą bazę $T_{u(p)}^\perp \mathcal{M}$. Na początek przyjmijmy $w_i := \partial_i u$ dla $i = 1, \dots, m$, w ten sposób otrzymując (niekoniecznie ortonormalną) bazę $T_{u(p)} \mathcal{M}$. Następnie obierzmy jeden punkt $p \in U$ i dopełnijmy $w_1(p), \dots, w_m(p)$ do bazy \mathbb{R}^n wektorami w_{m+1}, \dots, w_n ; pola wektorowe w_{m+1}, \dots, w_n okreśmy jako funkcje stałe na U . Ponieważ wektory w_1, \dots, w_n zmieniają się w sposób ciągły, więc dla pewnego (potencjalnie mniejszego) otoczenia $U' \subseteq U$ wektory w_1, \dots, w_n nadal są liniowo niezależne.

Ortogonalizacja Grama-Schmidta: $\lambda_{k+1} v_{k+1} := w_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle w_{k+1}, v_i \rangle v_i$, gdzie $\lambda_{k+1} > 0$ jest odpowiednio dobraną stałą zapewniającą $|v_{k+1}| = 1$.

Pozostaje przeprowadzić operację ortogonalizacji Grama-Schmidta na wektorach $w_1(p'), \dots, w_n(p')$ dla każdego $p' \in U'$; powstała rodzina $v_1(p'), \dots, v_n(p')$ jest wówczas ortonormalną bazą \mathbb{R}^n . Pozostaje prawdą, że $v_1(p'), \dots, v_m(p')$ jest bazą $T_{u(p')}\mathcal{M}$, więc dzięki ortonormalności $v_{m+1}(p'), \dots, v_n(p')$ musi być bazą $T_{u(p')}^\perp \mathcal{M}$. Ponadto procedura ortogonalizacji jest wyrażona gładkimi wzorami, więc uzyskana rodzina jest gładką funkcją punktu $p' \in U'$.

ZASTOSOWANIE TWIERDZENIA O FUNKCJI ODWROTNEJ.

Dysponując polami v_{m+1}, \dots, v_n , określamy przekształcenie gładkie

$$U' \times \mathbb{R}^{n-m} \ni (p', z) \xrightarrow{\Phi} u(p') + z_1 v_{m+1} + \dots + z_{n-m} v_n \in \mathbb{R}^n.$$

Zauważmy, że po obcięciu do dowolnego plasterka $\{p'\} \times B_\varepsilon$ przekształcenie Φ jest liniową izometrią na dysk $D^\perp(u(p'), \varepsilon)$. Naszym celem jest wykazanie, że dyski te się nie przecinają, a więc że Φ jest różnowartościowe. W tym celu odnotujemy, że w punkcie $(p, 0) \in U'$ różniczka Φ ma postać

$$\begin{aligned} \partial_{p_i} \Phi(p, 0) &= \partial_i u(p) = w_i(p) & \text{dla } i = 1, \dots, m, \\ \partial_{z_j} \Phi(p, 0) &= v_{m+j}(p) & \text{dla } j = 1, \dots, n-m. \end{aligned}$$

Otrzymane wektory tworzą bazę \mathbb{R}^n , więc różniczka $D_{(p,0)}\Phi$ jest odwracalna. Z twierdzenia o funkcji odwrotnej otrzymujemy, że Φ jest dyfeomorfizmem po obcięciu do pewnych otoczeń $(p, 0) \in U' \times \mathbb{R}^{n-m}$ (i $u(p) \in \mathbb{R}^n$). W szczególności Φ jest lokalnie różnowartościowe, co dowodzi rozłączności dysków $D^\perp(y, \varepsilon)$ i jednoznaczności rzutu $\pi(x)$.

Pozostaje uzasadnić gładkość $\pi: \mathcal{M}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{M}$. To jednak wynika z gładkości przekształcenia

$$U' \times \mathbb{R}^{n-m} \ni (p', z) \xrightarrow{\bar{\pi}} (p', 0) \in U' \times \mathbb{R}^{n-m}.$$

Zgodnie ze wcześniejszym opisem, mamy $\pi = \Phi \circ \bar{\pi} \circ \Phi^{-1}$, co dowodzi gładkości π .

Na koniec warto jeszcze zaznaczyć, że $\varepsilon > 0$ dobraliśmy dla otoczenia każdego punktu $y \in \mathcal{M}$ z osobna. Dzięki zwartości można jednak pokryć \mathcal{M} skończenie wieloma takimi otoczeniami, a następnie wybrać najmniejszą z wartości ε . \square

Cały ten dowód (z wyjątkiem początkowej redukcji) można streścić jako zastosowanie twierdzenia o funkcji odwrotnej do przekształcenia

$$T^\perp \mathcal{M} \ni (p, v) \xrightarrow{\Phi} p + v \in \mathbb{R}^n,$$

jako że różniczka $D_{(p,0)}\Phi$ jest z jasnych względów izomorfizmem. Wcześniej należałoby jednak uzasadnić, że wiązka normalna $T^\perp \mathcal{M}$ ma strukturę rozmaitości gładkiej, co sprowadza się mniej więcej do rachunków powyżej.

Twierdzenie o otoczeniu tubularnym działa jedynie dla małego $\varepsilon > 0$, czyli dla małego otoczenia. Łatwo się o tym samodzielnie przekonać, patrząc na przykład okręgu $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ (tutaj musi być $\varepsilon < 1$). Analizując przykład elipsy, można zauważyć związek między optymalnym ε a krzywizną (zob. zadanie 3.5).

Założenia twierdzenia można za to osłabić, zakładając, że \mathcal{M} jest rozmaitością jedynie klasy C^2 ; rzut π jest wówczas klasy C^1 . Nie wystarczy jednak, by \mathcal{M} była klasy C^1 (zob. zadanie 3.4).

3.3 Rzut $\pi: \mathcal{M}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{M}$ i druga forma podstawowa

Dla oznaczenia pochodnej kierunkowej w \mathbb{R}^n (branej po współrzędnych) będziemy używali oznaczenia $\nabla_v f$. Jeśli $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, to we współrzędnych oznacza to

$$\nabla_v f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad (\nabla_v f)^i(x) = \sum_{j=1}^n v^j \partial_j f^i(x).$$

Można też rozważać samo $\nabla f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ jako przekształcenie liniowe względem drugiej współrzędnej, $\nabla^2 f$ jako przekształcenie dwuliniowe, etc.

Wprost z definicji, obcięcie $\pi|_{\mathcal{M}}$ jest identycznością. Stąd wniosek, że $\nabla_u \pi_p = u$, jeśli $p \in \mathcal{M}$ oraz $u \in T_p \mathcal{M}$. Z drugiej strony, w obcięciu do $D^\perp(p, \varepsilon)$ przekształcenie π jest stałe równe p , więc $\nabla_v \pi_p = 0$ dla $v \in T_p^\perp \mathcal{M}$. W efekcie okazuje się, że $\nabla \pi_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest rzutem prostopadłym na $T_p \mathcal{M}$.

Rozważmy teraz dwa pola wektorowe u, v na \mathcal{M}_ε , które po obcięciu do \mathcal{M} są stycznymi. Zgodnie z wcześniejszymi obserwacjami, w dowolnym punkcie \mathcal{M} mamy równość $\nabla_u \pi = u$. Możemy więc tę równość zróżniczkować w kierunku v , co daje:

$$\nabla_v u = \nabla_v (\nabla_u \pi) = \nabla_{v,u}^2 \pi + \nabla_{\nabla_v u} \pi.$$

W ustalonym punkcie $p \in \mathcal{M}$ wiemy, że rzutem $\nabla_v u$ na przestrzeń styczną $T_p \mathcal{M}$ jest $\nabla_{\nabla_v u} \pi$. Dodatkowy człon $\nabla_{v,u}^2 \pi$ musi być więc rzutem $\nabla_v u$ na przestrzeń normalną $T_p^\perp \mathcal{M}$, co w szczególności pokazuje, że jest prostopadły do przestrzeni stycznej. Odnajmy, że każde dwa wektory $u, v \in T_p \mathcal{M}$ można przedłużyć do pól stycznych na \mathcal{M} , a następnie do pól na \mathcal{M}_ε , więc wektor $\nabla_{v,u}^2 \pi$ jest prostopadły dla dowolnych stycznych wektorów u, v .

Równość $\nabla_u \pi = u$ nie jest tożsamością zachodzącą na zbiorze otwartym, ale wystarczy, by zachodziła na krzywej o wektorze prędkości v .

Definicja 3.6. Drugą formę podstawową gładkiej podrozmaitości $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ definiujemy jako

$$A_p(u, v) := -\nabla_{u,v}^2 \pi_p,$$

gdzie $p \in \mathcal{M}$ jest punktem na rozmaitości, a $u, v \in T_p \mathcal{M}$ są dwoma wektorami stycznymi. Dla ustalonego $p \in \mathcal{M}$ jest to symetryczna forma dwuliniowa o wartościach w $T_p^\perp \mathcal{M}$:

$$A_p: T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow T_p^\perp \mathcal{M}.$$

Trzeba uważać: drugą formę podstawową definiuje się czasem z przeciwnym znakiem, np. w [Lee97, Ch. 8]

Nazwa *druga forma podstawowa* jest historycznym śladem dawnego nazewnictwa. Otóż metrykę Riemanna (czyli iloczyn skalarny na przestrzeni stycznej) nazywano kiedyś *pierwszą formą podstawową*.

Intuicję być może łatwiej uzyskać w szczególnym przypadku, gdy \mathcal{M} jest podrozmaitością wymiaru $n - 1$. Wówczas wiązka normalna jest jednowymiarowa i można znaleźć (przynajmniej lokalnie) pole normalne N :

$$N: \mathcal{M} \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad N(p) \in T_p^\perp \mathcal{M}, \quad |N(p)| = 1 \quad \text{dla } p \in \mathcal{M}.$$

Możemy wówczas wprowadzić symetryczną formę dwuliniową o wartościach w \mathbb{R} :

$$h_p: T_p \mathcal{M} \times T_p \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h_p(u, v) := \langle A_p(u, v), N_p \rangle,$$

również zwaną niekiedy drugą formą podstawową (czego będziemy unikać). Związek między h i A można też zapisać jako $A = hN$.

Należy jednak być ostrożnym, gdyż N można (lokalnie) wybrać na dwa sposoby, co wpływa na znak h . Gdy \mathcal{M} jest orientowalna, można wybrać N globalnie. Ponadto gdy \mathcal{M} jest zadana jako brzeg gładkiego ograniczonego obszaru $\mathcal{M} = \partial\Omega$, naturalnym wyborem jest pole N skierowane *na zewnątrz* Ω ; przejście od h do A (lub odwrotnie) jest wówczas jednoznaczne.

3.4 Krzywizna Riemanna w ujęciu zewnętrznym

Trzeba z góry uprzedzić, że niniejszy podrozdział jest w samym założeniu anachroniczny. Historycznie krzywizna Gaussa¹ została wprowadzona jako własność powierzchni w \mathbb{R}^3 , ale już sam Gauss odkrył, że jest ona niezmiennikiem izometrii (mówi o tym tzw. *Theorema Egregium*), a więc tak naprawdę własnością powierzchni jako abstrakcyjnej rozmaitości.

W związku z tym logicznym wyjściem jest definiować krzywiznę rozmaitości bez odniesienia do zanurzenia. Odpowiednią definicję łatwo znaleźć w literaturze [Lee97, Ch. 7], [Pet06, Ch. 2, Sec. 3], [GHL04, Def. 3.3]. Tutaj ograniczymy się do zdefiniowania krzywizny podrozmaitości w \mathbb{R}^n , co ma oczywiste wady. Posiada jednak jedną zaletę – pozwoli nam szybciej przejść do badania potoku przekształceń harmonicznych.

Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką podrozmaitością, a $a, b, c, d \in T_p\mathcal{M}$ czterema wektorami stycznymi w $p \in \mathcal{M}$. Wówczas krzywiznę Riemanna definiujemy wzorem

$$\text{Rm}_p(a, b, c, d) := \langle A_p(a, d), A_p(b, c) \rangle - \langle A_p(a, c), A_p(b, d) \rangle. \quad (3.1)$$

Jest to więc czteroliniowe przekształcenie $\text{Rm}_p: (T_p\mathcal{M})^4 \rightarrow \mathbb{R}$. W literaturze wzór ten nosi nazwę *równania Gaussa* [Lee97, Ch. 8, eq. (8.4)], [Pet06, Ch. 4], [GHL04, Def. 5.3] i jest wnioskiem z właściwej definicji krzywizny Riemanna. W ogólnym przypadku $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ odpowiedni wzór uwzględnia oczywiście krzywiznę otaczającej rozmaitości \mathcal{N} .

Biorąc ślad względem pierwszej i czwartej współrzędnej, otrzymujemy definicję krzywizny Ricciego:

$$\text{Ric}_p(a, b) := (\text{tr}_{1,4} \text{Rm}_p)(a, b) = \sum_{j=1}^m \text{Rm}(e_j, a, b, e_j),$$

gdzie za e_j można przyjąć dowolną bazę ortogonalną $T_p\mathcal{M}$. Jest to dwuliniowe przekształcenie $\text{Ric}_p: (T_p\mathcal{M})^2 \rightarrow \mathbb{R}$, w dodatku symetryczne (zadanie 3.9).

Biorąc ślad raz jeszcze, dostajemy krzywiznę skalarną:

$$S_p := \text{tr Ric}_p = \sum_{j,k=1}^m \text{Rm}(e_j, e_k, e_k, e_j).$$

W dalszej części wykładu najważniejsza jednak będzie *krzywizna sekcyjna*. W przestrzeni stycznej $T_p\mathcal{M}$ wybierzmy płaszczyznę (czyli dwuwymiarową podprzestrzeń liniową) $\alpha \subseteq T_p\mathcal{M}$. Krzywiznę sekcyjną w kierunku α definiujemy jako

$$\text{sec}(\alpha) := \text{Rm}(u, v, v, u) \quad \text{dla dowolnej bazy o.n. } u, v \in \alpha.$$

¹Carl Friedrich Gauss (1777-1855), niemiecki matematyk i fizyk

W literaturze można spotkać różne konwencje, jeśli chodzi o znak Rm

Można też rozważyć dowolną bazę $u, v \in \alpha$, i wówczas krzywizna sekcyjna wyraża się wzorem

$$\sec(\alpha) = \sec(u, v) = \frac{\text{Rm}(u, v, v, u)}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle \langle u, v \rangle};$$

mianownik można interpretować jako kwadrat normy $u \wedge v$, albo jako pole równoległoboku rozpiętego na u i v . Poprawność powyższej definicji można uzasadnić dzięki symetriom krzywizny Riemanna (zadanie 3.10).

Krzywizna sekcyjna \mathcal{M} w kierunku α pokrywa się z klasyczną krzywizną Gaussa dwuwymiarowej powierzchni

$$\mathcal{M} \cap (p + \alpha \oplus T_p^\perp \mathcal{M}),$$

otrzymanej przez cięcie \mathcal{M} w kierunku α . W szczególności, jeśli $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^3$ jest powierzchnią w \mathbb{R}^3 , to $\sec(T_p \mathcal{M})$ jest klasyczną krzywizną Gaussa.

3.5 Zadania

Zadanie 3.1. Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką podrozmaitością, a $V \subseteq \mathcal{M}$ otwartym podzbiorem \mathcal{M} . Wówczas funkcja $f: \mathcal{M} \supseteq V \rightarrow \mathbb{R}$ jest gładka wtedy i tylko wtedy, gdy przedłuża się do funkcji gładkiej $\bar{f}: W \rightarrow \mathbb{R}$ na otwartym podzbiorku $V \subseteq W \subseteq \mathbb{R}^n$.

Zadanie 3.2. Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ będą dwiema gładkimi podrozmaitościami. Scharakteryzować funkcje gładkie $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, posługując się jedynie znajomością funkcji gładkich $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $\mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Zadanie 3.3. (a) Operator liniowy $D: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy różniczkowaniem w $p \in \mathbb{R}^n$, jeśli dla dowolnych $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ spełnia

$$D(f \cdot g) = f(p)D(g) + g(p)D(f) \quad (\text{warunek Leibniza}).$$

Sprawdzić, że dla każdego $v \in \mathbb{R}^n$ operator pochodnej kierunkowej $f \mapsto \nabla_v f_p$ jest różniczkowaniem w p . Udowodnić, że każde różniczkowanie jest tej postaci.

(b) Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką podrozmaitością. Dla $p \in \mathcal{M}$ zdefiniujmy

$$T := \{D: C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R} : D \text{ jest różniczkowaniem w } p\},$$

przy czym pojęcie różniczkowania $D: C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy analogicznie jak w \mathbb{R}^n . Znaleźć izomorfizm liniowy pomiędzy T i przestrzenią styczną $T_p \mathcal{M}$.

Zadanie 3.4. Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie wykresem funkcji $f(x) = |x|^{3/2}$. Przekonać się, że dla małych $\varepsilon > 0$ punkt $(0, \varepsilon)$ ma dokładnie dwa punkty najbliższe na \mathcal{M} .

Zadanie 3.5. Rozważmy elipsę

$$E := \{(x, y) : (x/a)^2 + (y/b)^2 = 1\} \quad (a, b > 0),$$

jej wnętrze E^- i zewnątrz E^+ . Zbadać, dla jakich $\varepsilon > 0$ gładkimi krzywymi są zbiory

$$\{p \in E_+ : \text{dist}(p, E) = \varepsilon\} \quad \text{oraz} \quad \{p \in E_- : \text{dist}(p, E) = \varepsilon\}.$$

Zadanie 3.6. Rozważmy torus zanurzony w \mathbb{R}^3 :

$$T := \left\{ (x, y, z) : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2 \right\} \quad (0 < r < R)$$

oraz płaszczyznę $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Czy rzut ortogonalny T na V ma gładki brzeg? Innymi słowy: czy torus widziany ludzkim okiem jest gładki?

Zadanie 3.7. Dla sfery $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ wyznaczyć rzut $\pi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ i jego pochodne. Wykazać, że druga forma podstawowa ma postać

$$A_p(u, v) = \langle u, v \rangle p \quad \text{dla } p \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad u, v \in T_p \mathbb{S}^{n-1}.$$

Zadanie 3.8. Wykazać, że krzywizna Riemanna Rm posiada następujące symetrie (dla dowolnych wektorów stycznych a, b, c, d):

- (a) $\text{Rm}(a, b, c, d) = -\text{Rm}(b, a, c, d)$
- (b) $\text{Rm}(a, b, c, d) = -\text{Rm}(a, b, d, c)$
- (c) $\text{Rm}(a, b, c, d) = \text{Rm}(c, d, a, b)$
- (d) $\text{Rm}(a, b, c, d) + \text{Rm}(b, c, a, d) + \text{Rm}(c, a, b, d) = 0$

Zadanie 3.9. Sprawdzić, że krzywizna Ricciego jest symetryczną formą dwuliniową:

$$\text{Ric}_p(a, b) = \text{Ric}(b, a) \quad \text{dla } a, b \in T_p \mathcal{M}.$$

Zadanie 3.10. Ustalmy płaszczyznę $\alpha \subseteq T_p \mathcal{M}$. Uzasadnić, że wielkość

$$\text{sec}(u, v) = \frac{\text{Rm}(u, v, v, u)}{\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle^2}$$

nie zależy od wyboru bazy $u, v \in \alpha$.

Zadanie 3.11. Dla sfery $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ wyprowadzić następujący wzór na krzywiznę Riemanna:

$$\text{Rm}_p(a, b, c, d) = \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle - \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle \quad \text{dla } a, b, c, d \in T_p \mathbb{S}^{n-1},$$

a następnie wyznaczyć dla \mathbb{S}^{n-1} krzywiznę Ricciego $\text{Ric}_p(a, b)$, krzywiznę skalarną S_p i krzywiznę sekcijną $\text{sec}_p(\alpha)$.

Rozdział 4

Klasyczna teoria potoku przekształceń harmoniczych

4.1 Określenie problemu

Tak jak poprzednio, będziemy zakładać, że dziedziną jest przestrzeń euklidesowa \mathbb{R}^n , a przeciwdziedziną zwarta podzbiorność bez brzegu $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$. W tej ogólności, w rozdziale 1.3 równanie potoku przekształceń harmoniczych zostało wprowadzone jako

$$(\partial_t - \Delta^\top)u = 0,$$

gdzie $\Delta^\top u(t, x)$ jest składową laplasjanu $\Delta u(t, x)$ (obliczanego po współrzędnych dla przekształcenia $u_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$) styczną do \mathcal{N} w punkcie $u(t, x)$. Korzystając z drugiej formy podstawowej, równanie to możemy przepisać w równoważnej postaci

$$(\partial_t - \Delta u) = A_u(\nabla u, \nabla u),$$

gdzie tym razem użyliśmy skrótu notacyjnego $A_u(\nabla u, \nabla u) = \sum_{j=1}^n A_u(\partial_j u, \partial_j u)$.

Żeby ułatwić analizę rozwiązań, warto rozważyć dziedzinę

- zwartą (praca na \mathbb{R}^n wymaga założeń o zachowaniu w nieskończoności),
- bez brzegu (praca na \mathbb{B}^n prowadzi do rozważania warunków brzegowych)
- i płaską (praca na \mathbb{S}^{n-1} wymagałaby od nas uwzględnienia krzywizny dziedziny).

Wszystkie te warunki spełnia n -wymiarowy torus

$$\mathbb{T}^n := (\mathbb{S}^1)^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n.$$

Odpowiednie sformułowania są prawdziwe dla każdego z wyżej wymienionych przypadków (\mathbb{R}^n , \mathbb{B}^n , \mathbb{S}^{n-1}), tutaj jednak ograniczymy się do funkcji określonych na \mathbb{T}^n . Można je utożsamiać z funkcjami 1-okresowymi na \mathbb{R}^n .

Badany przez nas potok przekształceń harmoniczych ma więc postać:

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(t, x) = A_u(\nabla u, \nabla u) & \text{dla } x \in \mathbb{T}^n, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dla } x \in \mathbb{T}^n. \end{cases} \quad (\text{HMF})$$

4.2 Istnienie rozwiązań na krótkim przedziale czasowym

Twierdzenie Eellsa-Sampsona i strategia dowodu

Jeśli przekształcenie początkowe $u_0: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ jest gładkie, a obie rozmaitości \mathcal{M}, \mathcal{N} zamknięte (tzn. zwarte i bez brzegu), to na pewnym (małym) przedziale czasowym $[0, T)$ istnieje gładkie rozwiązanie $u: [0, T) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ potoku przekształceń harmonicznych. Wynik ten pochodzi od Eellsa i Sampsona¹ [ES64], zob. też [LW08, Th. 5.2.1].

Twierdzenie takie nie jest zaskakujące dla osób zajmujących się nieliniowymi równaniami parabolicznymi. Dowód przebiega jak większość innych w tej dziedzinie, ale warto zwrócić uwagę na problem związany z geometrycznymi więzami nałożonymi na rozwiązanie.

Żeby ułatwić prezentację rozumowania, ograniczymy się do przypadku dziedziny $\mathcal{M} = \mathbb{T}^n$, jak opisano w poprzednim podrozdziale. Założymy ponadto wprost, że $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ jest podrozmaitością przestrzeni euklidesowej, chociaż w świetle twierdzenia Nasha² o zanurzeniu izometrycznym nie zmniejsza to ogólności rozważań.

Twierdzenie 4.1. *Założmy, że $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ jest zamkniętą podrozmaitością. Wtedy dla każdego przekształcenia $u_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ istnieje maksymalny czas $T_{\max}(u_0, \mathbb{T}^n, \mathcal{N}) > 0$ taki, że potok (HMF) posiada jednoznaczne gładkie rozwiązanie $u: [0, T_{\max}) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N}$. Ponadto jeśli $T_{\max} < \infty$, to*

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \|\nabla u_t\|_\infty = +\infty.$$

Strategia dowodu jest następująca:

- (a) Przedłużymy drugą formę podstawową z \mathcal{N} do całej przestrzeni \mathbb{R}^d , co pozwala rozważać dowolne funkcje o wartościach w \mathbb{R}^d .
- (b) Zdefiniujemy operator $u \mapsto v = Su$ rozwiązywania problemu pomocniczego

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)v = A_u(\nabla u, \nabla u), \\ v_0 = u_0, \end{cases}$$

tak, by rozwiązanie równania (HMF) sprowadzało się do znalezienia punktu stałego S . Korzystając z twierdzenia Banacha o punkcie stałym, wykażemy istnienie punktu stałego.

- (c) Wykażemy gładkość i jednoznaczność znalezionej rozwiązania, oraz wyprowadzamy warunek towarzyszący wybuchowi w skończonym czasie.
- (d) Sprawdźmy, że znalezione rozwiązanie rzeczywiście przyjmuje wartości w podrozmaitości \mathcal{N} .

¹James Eells (1926-2007), amerykański matematyk
Joseph H. Sampson (1926-2003), amerykański matematyk

²John Nash (1928-2015), amerykański matematyk

Przedłużenie drugiej formy podstawowej

Zgodnie z Definicją 3.6, druga forma podstawowa wyraża się przez rzut $\pi: \mathcal{N}_\varepsilon \rightarrow \mathcal{N}$:

$$A_p(u, v) = -\nabla_{u,v}^2 \pi_p \quad \text{dla } p \in \mathcal{N}, \quad u, v \in T_p \mathcal{N}.$$

Ten wzór zadaje już rozszerzenie $A_p(u, v)$ na punkty $p \in \mathcal{N}_\varepsilon$ w otoczeniu tubularnym i dowolne wektory $u, v \in \mathbb{R}^d$.

Aby rozszerzyć na dowolne $p \in \mathbb{R}^d$, użyjemy funkcji wycinającej. Wybierzmy więc funkcję $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ spełniającą $\eta \equiv 1$ na $\mathcal{N}_{\varepsilon/4}$ oraz $\eta \equiv 0$ poza $\mathcal{N}_{\varepsilon/2}$. Pozwala to zdefiniować:

$$A_p(u, v) := -\nabla_{u,v}^2 (\eta \pi)_p \quad \text{dla } p \in \mathbb{R}^d, \quad u, v \in \mathbb{R}^d.$$

Tak określone A jest funkcją gładką o zwartym nośniku, przyjmującą wartości w macierzach symetrycznych.

Tak jak wcześniej, dla skonstruowanego przedłużenia również przyjmujemy konwencję notacyjną $A_u(\nabla u, \nabla u) = \sum_j A_u(\partial_j u, \partial_j u)$.

Zastosowanie twierdzenia Banacha o punkcie stałym

Rozwiązania będziemy szukali w przestrzeni

$$X_T := \left\{ u : u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u \in C^0([0, T] \times \mathbb{T}^n, \mathbb{R}^d), \quad u_0 = u_0 \right\},$$

$$\|u\|_{X_T} := \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty,$$

Nadużycie notacji: u_0 to jednocześnie zadana funkcja początkowa oraz funkcja $u(0, x)$

czyli funkcji klasy C^1 o danych początkowych u_0 . Zgodnie z przyjętą konwencją, rozważamy tu jednak jedynie pochodne względem zmiennych przestrzennych. Odnotujmy, że X_T ze wskazaną normą jest przestrzenią zupełną. Wartość $T > 0$ zostanie ustalona później.

Wprowadzamy operator S zgodnie ze wzorem Duhamela (Wniosek 2.6)

$$Su(t, x) := H_t u_0(x) + \int_0^t H_{t-r} (A_u(\nabla u, \nabla u))(x) dr.$$

Jeśli u jest odpowiednio regularne, $v = Su$ jest rozwiązaniem problemu pomocniczego

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)v = A_u(\nabla u, \nabla u), \\ v_0 = u_0, \end{cases}$$

Gdy $u \in X_T$, funkcja v może nie być klasy C^2 , i wówczas jest zaledwie słabym rozwiązaniem

jednak na razie skupmy uwagę na jawnej definicji S .

Znalezienie rozwiązania (HMF) sprowadza się – choć na razie jedynie formalnie – do znalezienia punktu stałego S . Dokonamy tego przy pomocy twierdzenia Banacha³ o punkcie stałym. Ze względu na nieliniowość prawej strony równania nie można oczekiwać, że S jest kontrakcją na X_T , dlatego ograniczymy się do domkniętej kuli wokół $H_t u_0$ (rozwiązania równania ciepła z danymi początkowymi u_0):

$$B := \{u \in X_T : \|u - H_t u_0\|_{X_T} \leq 1\}.$$

³Stefan Banach (1892-1945), polski matematyk

Lemat 4.2. *Istnieje (mała) wartość $T = T(n, \mathcal{N}, \|\nabla u_0\|_\infty) > 0$, dla której $S: B \rightarrow B$ jest kontrakcją, i w konsekwencji posiada dokładnie jeden punkt stały.*

Dowód lematu. Dla $u \in B$ zauważmy najpierw, że

$$\|u\|_{X_T} \leq \|u - H_t u_0\|_{X_T} + \|H_t u_0\|_{X_T} \leq 1 + C(\mathcal{N}) + \|\nabla u_0\|_\infty,$$

a więc norma u jest ograniczona przez stałą zależną od \mathcal{N} i $\|\nabla u_0\|_\infty$. Aby przekonać się, że $Su \in B$, sprawdźmy, że

$$\begin{aligned} |Su - H_t u_0|(t, x) &= \left| \int_0^t H_{t-r} (A_u(\nabla u, \nabla u))(x) \, dr \right| \\ &\lesssim \int_0^t H_{t-r} |\nabla u|^2(x) \, dr \\ &\leq \|\nabla u\|_\infty^2 \int_0^t \, dr \\ &\lesssim T. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy, że $\|Su - H_t u_0\|_\infty \leq CT$. Dla dostatecznie małego $T > 0$ jest to wartość mniejsza od 1. Podobnie postępujemy z gradientem:

$$\begin{aligned} |\nabla(Su - H_t u_0)|(t, x) &= \left| \int_0^t \nabla H_{t-r} (A_u(\nabla u, \nabla u))(x) \, dr \right| \\ &\lesssim \|\nabla u\|_\infty^2 \int_0^t (t-r)^{-1/2} \, dr \\ &\lesssim T^{1/2}. \end{aligned}$$

Tym razem skorzystaliśmy ze zgrubnego oszacowania gradientu $\|\nabla H_t f\|_\infty \lesssim t^{-1/2} \|f\|_\infty$ (Stwierdzenie 2.3). W ten sposób ponownie otrzymujemy $\|Su - H_t u_0\|_\infty \leq 1$ dla dostatecznie małego $T > 0$. Wykazaliśmy więc, że – przy tym założeniu – $S: B \rightarrow B$.

Podobnie wygląda sprawdzenie, że S jest kontrakcją. W tym celu porównajmy najpierw prawe strony równania pomocniczego dla dwóch funkcji $u, v \in B$:

$$\begin{aligned} |A_u(\nabla u, \nabla u) - A_v(\nabla v, \nabla v)| &\leq |(A_u - A_v)(\nabla u, \nabla u)| \\ &\quad + |A_v(\nabla u - \nabla v, \nabla u)| + |A_v(\nabla v, \nabla u - \nabla v)| \\ &\lesssim |u - v| |\nabla u|^2 + |\nabla u - \nabla v| |\nabla u| + |\nabla v| |\nabla u - \nabla v|. \end{aligned}$$

Pozostaje wówczas bezpośrednio oszacować;

$$\begin{aligned} |Su - Sv|(t, x) &= \left| \int_0^t H_{t-r} (A_u(\nabla u, \nabla u) - A_v(\nabla v, \nabla v))(x) \, dr \right| \\ &\lesssim \int_0^t H_{t-r} (|\nabla u|^2 |u - v| + (|\nabla u| + |\nabla v|) |\nabla u - \nabla v|)(x) \, dr \\ &\lesssim \|u - v\|_{X_T} \int_0^t \, dr \\ &\leq T \|u - v\|_{X_T}. \end{aligned}$$

Podobny rachunek pokazuje, że $\|\nabla(Su - Sv)\|_\infty \lesssim T^{1/2} \|u - v\|_{X_T}$. Przy założeniu dostatecznie małego $T > 0$ mamy więc $\|Su - Sv\|_{X_T} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{X_T}$. Na mocy twierdzenia Banacha dowodzi to istnienia (jednoznacznego w B) punktu stałego $Su = u$.

Odnajmy, że jest to w ogóle jedyny punkt stały S (nie tylko w B). Przypuśćmy mianowicie, że oprócz znalezionej punktu stałego $u \in B$ jest jeszcze inny, $v \notin B$. Z naszych rozważań wynika

$$\|v - H_t u_0\|_{X_T} \lesssim \|\nabla v\|_\infty^2 \cdot \max(T, T^{1/2}),$$

i w konsekwencji $v \in B$, gdyby T było dostatecznie małe (dobre zależnie od v). Oznacza to, że u i v muszą się pokrywać na pewnym początkowym przedziale. Zmieniając przekształcenie początkowe, wnioskujemy stąd, że zbiór $\{t \in [0, T] : u_t \equiv v_t\}$ jest otwarty. Jest jednak jednocześnie domknięty, a więc $u_t \equiv v_t$ dla wszystkich $t \in [0, T]$. \square

Gładkość, jednoznaczność i charakterystyka wybuchu

Znalezione rozwiązanie $u \in X_T$ spełnia

$$u(t, x) = H_t u_0(x) + \int_0^t H_{t-r} (A_u(\nabla u, \nabla u))(x) dr \quad \text{dla } t > 0,$$

Dyskusja gładkości, jednoznaczności i czasu istnienia rozwiązań jest całkowicie analogiczna jak w przypadku równań zwyczajnych

czyli jest zadane przez wzór Duhamela odpowiadający równaniu $(\partial_t - \Delta)u = A_u(\nabla u, \nabla u)$ o prawej stronie gładko zależnej od u i ∇u . Spełnione są więc założenia Twierdzenia 2.8, z którego wnioskujemy gładkość u .

Wybermy teraz $T_{\max} > 0$ jako maksymalny czas, dla którego istnieje gładkie rozwiązanie na $[0, T_{\max})$. W poprzednim kroku uzasadniliśmy jednoznaczność rozwiązania na krótkim przedziale czasowym $[0, T]$, ale ten sam argument (oparty na spójności odcinka) uzasadnia jednoznaczność na $[0, T_{\max})$.

Przypuśćmy teraz, że $T_{\max} < \infty$, a jednocześnie

$$\limsup_{t \nearrow T_{\max}} \|\nabla u_t\|_\infty < \infty.$$

Wówczas istnieje wspólne ograniczenie $\|\nabla u_t\|_\infty \leq A$ dla wszystkich $t \in [0, T_{\max})$. Jeśli przyjmiemy $u_{T_{\max}-\varepsilon}$ jako dane początkowe, to konstrukcja w poprzednim kroku daje nam przedłużenie rozwiązania na odcinek $[T_{\max} - \varepsilon, T_{\max} - \varepsilon + T]$, gdzie $T > 0$ zależy jedynie od n , \mathcal{N} i $\|u_{T_{\max}-\varepsilon}\|_\infty$ (które jest ograniczone przez A), a więc jest niezależne od ε . Wybierając dostatecznie małą wartość $\varepsilon > 0$, otrzymujemy sprzeczność z maksymalnością T_{\max} .

Spełnienie geometrycznych więzów

Pozostaje uzasadnić, że otrzymane rozwiązanie $u: [0, T_{\max}) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ równania (HMF) (z odpowiednio przedłużoną prawą stroną) rzeczywiście przyjmuje wartości w \mathcal{N} .

W tym celu rozważmy pomocniczo funkcję

$$g(t, x) := \frac{1}{2} |u(t, x) - \pi(u(t, x))|^2,$$

czyli kwadrat odległości $u(t, x)$ od \mathcal{N} . Jest ona dobrze określona i gładka, dopóki u przyjmuje wartości w otoczeniu tubularnym \mathcal{N}_ε .

W chwili $t = 0$ mamy $u_0(x) \in \mathcal{N}$, a więc $g(0, x) = \frac{1}{2}|u_0(x) - \pi(u_0(x))|^2 = 0$ dla $x \in \mathbb{T}^n$. Wykażemy, że tak pozostaje dla wszystkich $t > 0$. Na potrzeby dowodu obliczymy operator ciepła, przynajmniej dla małych $t > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t g &= \langle u - \pi_u, \partial_t u - \nabla \pi_u(\partial_t u) \rangle, \\ \partial_i g &= \langle u - \pi_u, \partial_i u - \nabla \pi_u(\partial_i u) \rangle, \\ \partial_{ii} g &= \left\langle u - \pi_u, \partial_{ii} u - \nabla \pi_u(\partial_{ii} u) - \nabla^2 \pi_u(\partial_i u, \partial_i u) \right\rangle \\ &\quad + \langle \partial_i u - \nabla \pi_u(\partial_i u), \partial_i u - \nabla \pi_u(\partial_i u) \rangle, \\ \Delta g &= \left\langle u - \pi_u, \Delta u - \nabla \pi_u(\Delta u) - \nabla^2 \pi_u(\nabla u, \nabla u) \right\rangle + |\nabla(u - \pi_u)|^2, \\ (\partial_t - \Delta)g &= \left\langle u - \pi_u, \underbrace{\partial_t u - \Delta u + \nabla^2 \pi_u(\nabla u, \nabla u)}_{=0} \right\rangle \\ &\quad - \underbrace{\langle u - \pi_u, \nabla \pi_u(\partial_t u - \Delta u) \rangle}_{=0} - \underbrace{|\nabla(u - \pi_u)|^2}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Dla małych t możemy przyjąć, że u nie opuszcza otoczenia tubularnego $\mathcal{N}_{\varepsilon/4}$, choć a priori nie wykluczamy, że może opuścić \mathcal{N} . Wówczas człon $\partial_t u - \Delta u + \nabla^2 \pi_u(\nabla u, \nabla u)$ jest zerowy wprost z równania (HMF). Dla precyzji warto odnotować, że rozwiązując nasze równanie, zdecydowaliśmy się na właśnie takie przedłużenie sformułowania (HMF) dla funkcji $u: [0, T_{\max}) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Drugi człon jest zerowy, gdyż $u - \pi_u$ jest wektorem prostopadłym do T_{π_u} , a $\nabla \pi_u(\dots)$ jest wektorem stycznym w π_u . Są to więc wektory prostopadłe.

Pozostaje ostatni człon, o którym wystarczy wiedzieć, że jest nieujemny. Wnioskujemy więc, że $(\partial_t - \Delta)g \leq 0$, przynajmniej dla małych $t > 0$. Ale skoro g jest funkcją nieujemną i $g(0, \cdot) \equiv 0$, to z zasady maksimum (Zadanie 1.3) g pozostaje funkcją zerową. Pozwala to przeprowadzić powyższe rozumowanie dla wszystkich $t \in [0, T_{\max})$ przez rozpatrzenie pierwszego momentu, w którym u opuszcza \mathcal{N} (ale jeszcze nie otoczenie tubularne). Kończy to dowód Twierdzenia 4.1. \square

4.3 Nierówności energetyczne

Standardowe oszacowania

Zacniemy od bardzo elementarnych oszacowań, które mogą wyglądać znajomo – te same własności (i w gruncie rzeczy z tym samym dowodem) pokazuje się dla klasycznego równania ciepła.

Najprostsza globalna nierówność energetyczna jest następująca:

Lemat 4.3. *Oznaczmy energię Dirichleta przez*

$$E(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla v|^2 dx.$$

Jeśli u jest rozwiązaniem (HMF), to

$$E(u_t) - E(u_0) = - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_t u_s|^2 dx ds,$$

w szczególności $E(u(t))$ jest funkcją nierosnącą.

Dowód. Dowód przebiega identycznie jak dla klasycznego równania ciepła. Różniczkując $E(u_t)$ po czasie, a następnie całkując przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\partial_t E(u_t) &= \int \langle \nabla u_t, \nabla \partial_t u_t \rangle \, dx \\ &= - \int \langle \Delta u_t, \partial_t u_t \rangle \, dx \\ &= - \int |\partial_t u_t|^2 \, dx.\end{aligned}$$

W ostatnim przejściu mogliśmy zamienić Δu_t na $\partial_t u_t$, ponieważ różnica tych dwóch zgodnie z równaniem (HMF) jest prostopadła do $T_{u_t} \mathcal{N}$, i w szczególności do wektora $\partial_t u_t \in T_{u_t} \mathcal{N}$. Całkując otrzymaną tożsamość po czasie, otrzymujemy tezę. \square

Odnotujmy jeszcze porównanie wielkości $|\partial_t u|$ i $|\nabla u|$:

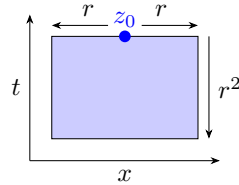
Lemat 4.4. *Jeśli u jest rozwiązaniem (HMF), to*

$$\int_{P_r} |\partial_t u|^2 \, dx \, dt \lesssim r^{-2} \int_{P_{2r}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt.$$

Przez $P_r(t_0, x_0)$ oznaczamy tu cylinder paraboliczny

$$P_r(t_0, x_0) = \left\{ (t, x) : t_0 - r^2 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq r \right\},$$

i domyślnie $P_r \equiv P_r(0, 0)$.



Dowód. Wybierzmy funkcję wycinającą φ spełniającą

$$\varphi \in C_c^\infty((-4r^2, 0] \times B_{2r}), \quad \varphi \equiv 1 \text{ na } [-r^2, 0] \times B_r, \quad \varphi \geq 0.$$

Możemy to zrobić z zachowaniem warunków $|\nabla \varphi| \lesssim r^{-1}$ i $|\partial_t \varphi| \lesssim r^{-2}$ (np. konstruując φ dla $r = 1$ i przeskalowując). Mnożąc równanie (HMF) stronami przez $\partial_t u$ i odnotowując prostopadłość do prawej strony równania, otrzymujemy $|\partial_t u|^2 = \partial_t u \Delta u$. Mnożąc teraz przez φ^2 i całkując, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_{P_{2r}} |\partial_t u|^2 \varphi^2 \, dx \, dt &= \int_{P_{2r}} \partial_t u \Delta u \varphi^2 \, dx \, dt \\ &= - \int_{P_{2r}} \nabla u \nabla (\partial_t u \varphi^2) \, dx \, dt \\ &= - \int_{P_{2r}} 2 \nabla u \partial_t u \varphi \nabla \varphi + \nabla u \nabla \partial_t u \varphi^2 \, dx \, dt \\ &= \text{I} + \text{II}\end{aligned}$$

Składnik I szacujemy za pomocą dosyć typowego triku:

$$\begin{aligned}|\text{I}| &\leq 2 \|\nabla \varphi\|_\infty \int_{P_{2r}} |\nabla u| |\partial_t u| \varphi \, dx \, dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{P_{2r}} |\partial_t u|^2 \varphi^2 \, dx \, dt + Cr^{-2} \int_{P_{2r}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt.\end{aligned}$$

Tu się wyjaśnia, dlaczego jako funkcję testową przyjęliśmy φ^2

Nierówności Younga $ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2$ użyliśmy tutaj z taką stałą, by wyraz $\int |\partial_t u|^2$ mógł być absorbowany przez lewą stronę poprzedniego oszacowania. Drugi wyraz to dokładnie ograniczenie, które mieliśmy uzyskać.

Pozostaje ograniczyć składnik \mathbb{II} , całkując przez części:

$$\begin{aligned}\mathbb{II} &= - \int_{P_{2r}} \partial_t \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) \varphi^2 \, dx \, dt \\ &= \int_{P_{2r}} \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \partial_t (\varphi^2) \, dx \, dt - \int_{B_{2r}} \frac{1}{2} |\nabla u(0, x)|^2 \varphi^2(0, x) \, dx \\ &\leq \int_{P_{2r}} |\nabla u|^2 \varphi^2 \partial_t \varphi \, dx \, dt \\ &\lesssim r^{-2} \int_{P_{2r}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt.\end{aligned}$$

Ponieważ φ nie zeruje się na całym brzegu obszaru, pojawia się tutaj człon brzegowy, ale na szczęście z właściwym znakiem. Tak jak dla \mathbb{I} , pozostały wyraz jest zgodny z oczekiwaniami. \square

Formuła monotoniczna

W późniejszych rozważaniach – zwłaszcza przy badaniu osobliwości – potrzebna będzie również lokalna kontrola energii. Z tego względu dla dowolnego $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n$ i $s > 0$ wprowadzamy wielkość

$$\Phi_{(t_0, x_0)}(s; u) := s H_s |\nabla u_{t_0-s}|^2(x_0), \quad (4.1)$$

$\Phi_{(t_0, x_0)}(r^2; u)$
to mniej więcej
 $r^{2-n} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u_{t_0-r^2}|^2$

o ile tylko u_{t_0-s} jest określone. Zapis ten będziemy skracać do $\Phi(s)$, jeśli u oraz z_0 będą jasne z kontekstu. Rozważania poniżej zakładają, że dziedziną jest \mathbb{R}^n (a nie \mathbb{T}^n), ale ograniczając je do funkcji periodycznych, otrzymujemy odpowiednie sformułowanie również dla torusa.

Wcześniej używaliśmy
oznaczenia u_λ , ale dla
uniknięcia kolizji oznaczeń
teraz będzie $u^{(\lambda)}$

Lemat 4.5. *Wprowadźmy oznaczenie $u^{(\lambda)}(t, x) := u(\lambda^2 t, \lambda x)$. Wówczas*

$$\Phi_{(0,0)}(\lambda^2 s; u) = \Phi_{(0,0)}(s; u^{(\lambda)}).$$

Jeśli u jest określone na
 $[0, T] \times \mathbb{T}^n$, to $u^{(\lambda)}$ na
 $[0, \lambda^{-2} T] \times \lambda^{-1} \mathbb{T}^n$

Ponadto jeśli u jest rozwiązaniem (HMF), to $u^{(\lambda)}$ również.

Dowód. Zauważmy, że $|\nabla u^{(\lambda)}(t, x)|^2 = \lambda^2 |\nabla u(t, x)|^2$ oraz $\rho^{(\lambda)}(t, x) = \lambda^{-n} \rho(t, x)$. Przez podstawienie otrzymujemy zatem, że całki $H_{\lambda^2 s} |\nabla u_{-\lambda^2 s}|^2(0)$ i $H_s |\nabla u_{-s}^{(\lambda)}|^2(0)$ różnią się właśnie o czynnik λ^2 .

Sprawdzenie równania (HMF) dla $u^{(\lambda)}$ wygląda podobnie jak w przypadku równania ciepła:

$$\begin{aligned}\partial_t u^{(\lambda)}(t, x) &= \lambda^2 \partial_t u(\lambda^2 t, \lambda x), & \Delta u^{(\lambda)}(t, x) &= \lambda^2 \Delta u(\lambda^2 t, \lambda x), \\ A_{u^{(\lambda)}}(\nabla u^{(\lambda)}, \nabla u^{(\lambda)}) \Big|_{(t,x)} &= \lambda^2 A_u(\nabla u, \nabla u) \Big|_{(\lambda^2 t, \lambda x)}.\end{aligned}$$

Jedyną nowością jest prawa strona równania, która jednak skaluje się tak samo. \square

Przejdziemy teraz do dowodu formuły monotonicznej. Została ona wykazana przez Struwego⁴ w [Str88] (zob. też [LW08, Th. 7.1.1]).

⁴Michael Struwe (ur. 1955), niemiecki matematyk

Lemat 4.6 (formuła monotoniczna). *Niech u będzie rozwiązaniem (HMF). Wówczas dla ustalonego $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}^n$ wielkość*

$$\Phi_{(t_0, x_0)}(s; u) = sH_s |\nabla u_{t_0-s}|^2(x_0)$$

jest niemalejącą funkcją argumentu $s > 0$.

Bezpośrednim wnioskiem z formuły monotonicznej jest, że

$$H_{s-t} |\nabla u_t|^2 \leq \frac{s}{s-t} H_s |\nabla u_0|^2,$$

co jest istotnie słabszą nierównością niż oszacowanie $H_{s-t} |\nabla u_t|^2 \leq H_s |\nabla u_0|^2$ dla rozwiązań równania ciepła. W szczególności, nie implikuje ono punktowego ograniczenia na ∇u_t .

Z drugiej strony, formuła monotoniczna okaże się (dużo później) kluczowa dla oszacowania wymiaru zbioru osobliwego. Pozwala też wywnioskować globalną nierówność z Lematu 4.3 w granicy $s \rightarrow \infty$.

Dowód. Dla uproszczenia obliczeń przyjmijmy $(t_0, x_0) = (0, 0)$. Wygodniej będzie również wykazać monotoniczność $\Phi(\lambda^2; u)$ względem λ , co jest oczywiście równoważne tezie. Zgodnie z poprzednim lematem mamy $\Phi(\lambda^2; u) = \Phi(1; u^{(\lambda)})$, co pozwala wyznaczyć pochodną:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Phi(\lambda^2; u) &= \partial_\lambda \Phi(1; u^{(\lambda)}) \\ &= \partial_\lambda \int |\nabla u_{-1}^{(\lambda)}|^2 \rho_1 \, dx \\ &= 2 \int \nabla u_{-1}^{(\lambda)} \cdot \nabla \partial_\lambda u_{-1}^{(\lambda)} \rho_1 \, dx \\ &= -2 \int \operatorname{div} (\rho_1 \nabla u_{-1}^{(\lambda)}) \cdot \partial_\lambda u_{-1}^{(\lambda)} \, dx \\ &= -2 \int (\rho_1 \Delta u_{-1}^{(\lambda)} + \nabla \rho_1 \cdot \nabla u_{-1}^{(\lambda)}) \cdot \partial_\lambda u_{-1}^{(\lambda)} \, dx. \end{aligned}$$

Zbadajmy kolejno każdy z wyrazów. Zauważmy, że $\partial_\lambda u_{-1}^{(\lambda)}$ jest wektorem stycznym do \mathcal{N} (w punkcie $u_{-1}^{(\lambda)}$), więc do $\Delta u_{-1}^{(\lambda)}$ możemy dodać wektor $(\partial_t - \Delta)u_{-1}^{(\lambda)}$ (ortogonalny do \mathcal{N}), pierwszy wyraz zastępując tym samym przez $\partial_t u_{-1}^{(\lambda)}$, czyli przez $\lambda^2 \partial_t u$ ewaluowane w $(-\lambda^2, \lambda x)$. Gradient ρ_1 obliczamy bezpośrednio jako $\nabla \rho_1(x) = -\frac{x}{2} \rho_1(x)$. Wreszcie,

$$\partial_\lambda u_{-1}^{(\lambda)}(x) = (x \cdot \nabla u - 2\lambda \partial_t u) \Big|_{(-\lambda^2, \lambda x)}.$$

Podstawiając, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Phi(\lambda^2; u) &= -2 \int \left(\rho_1(x) \cdot \lambda^2 \partial_t u - \frac{x}{2} \rho_1(x) \cdot \lambda \nabla u \right) \cdot (x \cdot \nabla u - 2\lambda \partial_t u) \Big|_{(-\lambda^2, \lambda x)} \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int \left| \lambda x \cdot \nabla u - 2\lambda^2 \partial_t u \right|^2 \Big|_{(-\lambda^2, \lambda x)} \rho_1(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int \left| y \cdot \nabla u - 2\lambda^2 \partial_t u \right|^2 \Big|_{(-\lambda^2, y)} \rho_{\lambda^2}(y) \, dy. \end{aligned}$$

Wynik jest niewątpliwie liczbą nieujemną, co implikuje monotoniczność Φ . \square

Możemy też ostateczny wynik nieco uprościć przez podstawienie:

$$\begin{aligned} 2\lambda\partial_s\Phi(\lambda^2; u) &= \partial_\lambda\Phi(\lambda^2; u) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int |y \cdot \nabla u - 2\lambda^2\partial_t u|^2 \Big|_{(-\lambda^2, y)} \rho_{\lambda^2}(y) \, dy. \end{aligned}$$

Przez $\partial_s\Phi$ oznaczyliśmy tutaj pochodną Φ względem pierwszego argumentu. Ostatecznie pochodną tę wyznaczamy jako

$$\begin{aligned} \partial_s\Phi(s; u) &= \frac{1}{2s} \int |y \cdot \nabla u - 2s\partial_t u|^2 \Big|_{(-s, y)} \rho_s(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2s} H_s |y \cdot \nabla u_{-s} - 2s\partial_t u_{-s}|^2(0). \end{aligned}$$

A w ogólnym przypadku jako:

$$\partial_s\Phi_{(t_0, x_0)}(s; u) = \frac{1}{2s} H_s |(y - x_0) \cdot \nabla u_{t_0-s} - 2s\partial_t u_{t_0-s}|^2(x_0).$$

4.4 Wzór Bochnera

Eells-Sampson [ES64], a następnie Hartman⁵ [Har67], wykazali, że potok przekształceń harmoniczych (HMF) ma lepsze własności, gdy rozmaitość w obrazie \mathcal{N} posiada niedodatnią krzywiznę sekcijną. Kluczem do tych wyników jest wzór Bochnera⁶, pokazujący związek między krzywizną \mathcal{N} a analitycznymi własnościami równania.

Lemat 4.7 (wzór Bochnera [LW08, Lem. 5.3.3]). *Niech $u: [0, T] \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ będzie dowolnym przekształceniem. Oznaczmy gęstość energii $e(t, x) := \frac{1}{2}|\nabla u(t, x)|^2$. Wówczas:*

$$(\partial_t - \Delta)e = - \sum_{\alpha, \beta} |(\partial_{\alpha\beta} u)^\top|^2 + \sum_{\alpha, \beta} \text{Rm}(\partial_\alpha u, \partial_\beta u, \partial_\beta u, \partial_\alpha u) + \sum_\alpha \langle \partial_\alpha u, \partial_\alpha (\partial_t - \Delta^\top) u \rangle,$$

gdzie Rm jest krzywizną Riemanna \mathcal{N} (3.1).

Wniosek 4.8. *Gdy u jest rozwiązaniem (HMF), wzór Bochnera przybiera prostszą postać*

$$(\partial_t - \Delta)e = - \sum_{\alpha, \beta} |(\partial_{\alpha\beta} u)^\top|^2 + \sum_{\alpha, \beta} \text{Rm}(\partial_\alpha u, \partial_\beta u, \partial_\beta u, \partial_\alpha u).$$

Jeśli ponadto krzywizna sekcyjna \mathcal{N} jest niedodatnia, to

$$(\partial_t - \Delta)e \leq 0,$$

a więc gęstość energii jest podrozwiązaniem równania ciepła.

Dowód Wniosku 4.8. Jeśli u jest rozwiązaniem potoku przekształceń harmoniczych, to wyraz $(\partial_t - \Delta^\top)u$ tożsamościowo znika.

⁵Philip Hartman (1915-2015), amerykański matematyk – nie mylić z aktorem o tym samym imieniu i nazwisku

⁶Salomon Bochner (1899-1982), amerykański matematyk urodzony w Podgórzu pod Krakowem

Człon z drugimi pochodnymi u można zapisać w zwarty sposób jako $|\nabla du|^2$, gdzie ∇ jest przeciągnięciem koneksji Levi-Civity na \mathcal{N}

Jeśli krzywizna sekcyjna \mathcal{N} jest nieujemna, to dla dowolnych liniowo niezależnych wektorów stycznych v, w mamy

$$\text{Rm}(v, w, w, v) = (|v|^2|w|^2 - |\langle v, w \rangle|^2) \cdot \sec(v, w) \leq 0,$$

gdyż $\sec(v, w) \leq 0$ oraz $|\langle v, w \rangle| \leq |v| \cdot |w|$. Gdy v, w są liniowo zależne (i nie wyznaczają płaszczyzny), to $\text{Rm}(v, w, w, v) = 0$ ze względu na symetrię Rm . W naszym przypadku, dla punktu $u \in \mathcal{N}$ i wektorów stycznych $\partial_\alpha u, \partial_\beta u$ mamy

$$\text{Rm}(\partial_\alpha u, \partial_\beta u, \partial_\beta u, \partial_\alpha u) \leq 0.$$

Człon $-\sum_{\alpha, \beta} |(\partial_{\alpha\beta} u)^\top|^2$ jest zawsze niedodatni, więc $(\partial_t - \Delta)e \leq 0$. \square

Gdy płaską dziedzinę \mathbb{T}^n zastąpimy przez dowolną rozmaitość \mathcal{M} (jak w [LW08, Ch. 5.3]), we wzorze Bochnera pojawia się dodatkowy człon $-\text{Ric}^M(\nabla u, \nabla u)$. Z tego powodu przekształcenia harmoniczne z rozmaitości o nieujemnej (a zwłaszcza dodatniej) krzywiznie Ricciego wykazują lepsze zachowanie [LW08, Prop. 1.5.2].

Gdy \mathcal{M} jest zamkniętą rozmaitością, w wyniku tej poprawki odpowiednia wersja Wniosku 4.8 daje nam nierówność $(\partial_t - \Delta)e \leq Ce$, gdzie stała C zależy od globalnego ograniczenia na krzywiznę Ricciego \mathcal{M} . W konsekwencji funkcja $\exp(-Ct) \cdot e$ jest podrozwiązaniem równania ciepła, co w zupełności wystarcza na potrzeby naszych zastosowań.

Jak widać, znaczenie ma zarówno geometria \mathcal{M} jak i \mathcal{N} . Jednak to wkład krzywizny \mathcal{N} jest dużo bardziej istotny dla analizy zachowania rozwiązań.

Dowód Lematu 4.7. Jest to bezpośredni rachunek. Zauważmy najpierw, że

$$(\partial_t - \Delta)e = -\sum_{\alpha, \beta} |\partial_{\alpha\beta} u|^2 + \sum_{\alpha} \langle \partial_\alpha u, (\partial_t - \Delta)\partial_\alpha u \rangle.$$

Przypomnijmy, że składową $\partial_{\alpha\beta} u$ ortogonalną do $T_u \mathcal{N}$ jest $-A_u(\partial_\alpha u, \partial_\beta u)$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy więc:

$$|\partial_{\alpha\beta} u|^2 = |(\partial_{\alpha\beta} u)^\top - A_u(\partial_\alpha u, \partial_\beta u)|^2 = |(\partial_{\alpha\beta} u)^\top|^2 + |A_u(\partial_\alpha u, \partial_\beta u)|^2.$$

Aby przekształcić drugi człon, rozłożymy również $(\partial_t - \Delta)u$ na część styczną i ortogonalną do \mathcal{N} . Przypomnijmy, że ta druga ma postać $A_u(\nabla u, \nabla u)$. Mamy więc:

$$(\partial_t - \Delta)\partial_\alpha u = \partial_\alpha(\partial_t - \Delta)u = \partial_\alpha(\partial_t - \Delta^\top)u + \partial_\alpha(A_u(\nabla u, \nabla u)).$$

Wykorzystując prostopadłość, mamy

$$\partial_\alpha \langle \partial_\alpha u, A_u(\nabla u, \nabla u) \rangle \equiv 0,$$

i w konsekwencji drugi człon daje wkład

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta} \langle \partial_\alpha u, \partial_\alpha(A_u(\partial_\beta u, \partial_\beta u)) \rangle &= -\sum_{\alpha, \beta} \langle \partial_{\alpha\alpha} u, A_u(\partial_\beta u, \partial_\beta u) \rangle \\ &= \sum_{\alpha, \beta} \langle A_u(\partial_\alpha u, \partial_\alpha u), A_u(\partial_\beta u, \partial_\beta u) \rangle, \end{aligned}$$

jeśli powołamy się raz jeszcze na fakt, że składową normalną $\partial_{\alpha\alpha}u$ jest $-A_u(\partial_\alpha u, \partial_\alpha u)$. Po uwzględnieniu tych przekształceń mamy ostatecznie

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)e &= - \sum_{\alpha,\beta} |(\partial_{\alpha\beta}u)^\top|^2 - |A_u(\partial_\alpha u, \partial_\beta u)|^2 \\ &\quad + \sum_\alpha \langle \partial_\alpha u, \partial_\alpha (\partial_t - \Delta^\top)u \rangle + \sum_{\alpha,\beta} \langle A_u(\partial_\alpha u, \partial_\alpha u), A_u(\partial_\beta u, \partial_\beta u) \rangle \\ &= - \sum_{\alpha,\beta} |(\partial_{\alpha\beta}u)^\top|^2 + \sum_{\alpha,\beta} \text{Rm}(\partial_\alpha u, \partial_\beta u, \partial_\beta u, \partial_\alpha u) + \sum_\alpha \langle \partial_\alpha u, \partial_\alpha (\partial_t - \Delta^\top)u \rangle \end{aligned}$$

na mocy równania Gaussa, czyli – na potrzeby niniejszego skryptu – z definicji krzywizny Riemanna (3.1). \square

4.5 Globalne rozwiązania w przypadku rozmaitości o niedodatniej krzywiznie sekcijnej

Wspomniane już twierdzenie Eellsa-Sampsona [ES64] (zob. też [LW08, Th. 5.3.1]) wzmacnia Twierdzenie 4.1 (o lokalnym w czasie istnieniu rozwiązań), gdy rozmaitość \mathcal{N} w obrazie ma niedodatnią krzywiznę sekcijną:

- w takim przypadku $T_{\max} = \infty$, czyli rozwiązanie jest określone na $[0, \infty) \times \mathcal{M}$;
- przy $t \rightarrow \infty$, przekształcenie u_t zbiega (w odpowiednim sensie) do gładkiego przekształcenia harmonicznego $u_\infty: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Ponieważ ewolucja u jest gładka, przekształcenie u_0 jest homotopijne z u_t dla każdego $t > 0$, a ze względu na gładką zbieżność $u_t \rightarrow u_\infty$, również z u_∞ . Okazuje się więc, że każde przekształcenie ciągle $u_0: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ można homotopijnie zmodyfikować do gładkiego przekształcenia harmonicznego – najpierw modyfikując je do przekształcenia gładkiego, a następnie poddając ewolucji zadanej przez (HMF).

Warto odnotować, że w ogólnym przypadku (czyli dla dowolnej rozmaitości \mathcal{N}) potok (HMF) może tworzyć osobliwości w skończonym czasie (czyli $T_{\max} < \infty$), a niektóre klasy homotopii przekształceń $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ mogą nie posiadać harmonicznych reprezentantów.

Tak jak poprzednio, twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej zamkniętej rozmaitości \mathcal{M} w dziedzinie (por. uwaga pod Wnioskiem 4.8), tutaj jednak ograniczymy się do torusa: $\mathcal{M} = \mathbb{T}^n$. Sformułowanie mówiące o zbieżności $u_t \rightarrow u_\infty$ można wzmocnić nieznacznie jak w [ES64] – dla każdego ciągu $t_k \rightarrow \infty$ istnieje podciąg, na którym ta zbieżność zachodzi – lub wzmocnić znacząco jak w [Har67] – po prostu $u_t \rightarrow u_\infty$ przy $t \rightarrow \infty$. Dla prostoty prezentacji pozostaniemy jednak przy skromniejszym sformułowaniu.

Twierdzenie 4.9. *Załóżmy, że $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ jest zamkniętą podrozmaitością o niedodatniej krzywiznie sekcijnej. Wtedy dla każdego przekształcenia $u_0 \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ potok (HMF) posiada jednoznaczne gładkie rozwiązanie $u: [0, \infty) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Ponadto istnieje ciąg $t_k \rightarrow \infty$, dla którego u_{t_k} jest ciągiem zbieżnym w C^2 do pewnego gładkiego przekształcenia harmonicznego u_∞ .*

Dowód. Zgodnie z Twierdzeniem 4.1 (o lokalnym istnieniu), aby uzasadnić, że maksymalny czas istnienia to $T_{\max} = \infty$, wystarczy wykluczyć wybuch $\|\nabla u_t\|_\infty$ w skończonym czasie. Jednak założenie o krzywiznie \mathcal{N} implikuje na mocy Wniosku 4.8 (wzoru Bochnera), że gęstość energii $e(t, x) = \frac{1}{2}|\nabla u(t, x)|^2$ jest podrozwiązaniem równania ciepła. Zgodnie z zasadą maksimum (Zadanie 1.3) oznacza to, że

$$e(t, x) \leq \max_{y \in \mathbb{T}^n} e(0, y) \quad \text{dla } t > 0, \quad x \in \mathbb{T}^n,$$

a więc $\|\nabla u_t\|_\infty \leq \|\nabla u_0\|_\infty$ dla wszystkich $t > 0$.

Badanie zbieżności u_t zaczniemy od uwagi o regularności. Otóż z zastosowania Twierdzenia 2.8 (o gładkości rozwiązań) wynika nie tylko regularność u_t , ale również ilościowe oszacowania na wszystkie pochodne:

$$\|u_t\|_{C^k} \leq C(n, \mathcal{N}, k, \|\nabla u_0\|_\infty) \quad \text{dla } t \geq 1.$$

Łatwo to zauważyć, śledząc dowód tego twierdzenia, oparty na iteracji Stwierdzenia 2.7 (o oszacowaniach Schauderowskich). Pozwala on ograniczyć dowolną z norm $\|u_t\|_{C^k}$ przez stałą zależną od k oraz $\|\nabla u_{t-1}\|_\infty$, przy czym w naszym przypadku ta druga wielkość jest ograniczona przez $\|\nabla u_0\|_\infty$.

Dla dowolnego ciągu $t_k \rightarrow \infty$, twierdzenie Arzeli-Ascolego⁷ pozwala nam więc wybrać podciąg, dla którego $u_{t_k} \rightarrow u_\infty$ w C^2 . Ze względu na równanie (HMF) również wyraz $\partial_t u_{t_k}$ zbiega jednostajnie do pewnej funkcji v , i w rezultacie graniczna funkcja u_∞ spełnia równanie

$$v - \Delta u_\infty = A_{u_\infty}(\nabla u_\infty, \nabla u_\infty).$$

Pozostaje zagwarantować, że $v \equiv 0$.

W tym celu powołamy się na Lemat 4.3 (nierówność energetyczną). Mówi on, że dla dowolnego $t > 0$ zachodzi

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_t u_s|^2 \, dx \, ds = E(u_0) - E(u_t) \leq E(u_0).$$

Całka po nieskończonym przedziale

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_t u_s|^2 \, dx \, ds$$

jest więc zbieżna, i w szczególności

$$\int_k^{k+1} \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_t u_s|^2 \, dx \, ds \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Możemy więc wybrać dla każdego k taki czas $t_k \in [k, k+1]$, że $\|\partial_t u_{t_k}\|_{L^2} \rightarrow 0$. Wybierając podciąg tak jak opisano wcześniej, otrzymujemy żądane przekształcenie u_∞ . Istotnie, jednostajna zbieżność $\partial_t u_{t_k} \rightarrow v$ w połączeniu ze zbieżnością $\partial_t u_{t_k} \rightarrow 0$ w $L^2(\mathbb{T}^n)$ implikuje, że $v \equiv 0$. \square

⁷Cesare Arzelà (1847-1912), włoski matematyk
Giulio Ascoli (1843-1896), włoski matematyk

4.6 Zadania

Zadanie 4.1. Niech $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ będzie zamkniętą podrozmaitością. Załóżmy, że $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest rozwiązaniem równania zwyczajnego

$$u'(t) = V(u(t)),$$

gdzie pole $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest gładkie i spełnia $V(p) \in T_p\mathcal{N}$ dla wszystkich $p \in \mathcal{N}$. Wykazać, że jeśli $u(0) \in \mathcal{N}$, to również $u(t) \in \mathcal{N}$ dla wszystkich $t \in [0, T]$.

Zadanie 4.2. Załóżmy, że $u, v: [0, T] \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N}$ są dwoma rozwiązaniami (HMF) jak w Twierdzeniu 4.1 i spełniają $|\nabla u|, |\nabla v| \leq D$ na $[0, T] \times \mathbb{T}^n$. Wykazać, że jeśli

$$\|u_0 - v_0\|_{C^1} := \|u_0 - v_0\|_\infty + \|\nabla u_0 - \nabla v_0\|_\infty \leq A,$$

to również

$$\|u_t - v_t\|_{C^1} \leq 2A \quad \text{dla } 0 \leq t \leq T_0,$$

gdzie horyzont czasowy T_0 może zależeć od n, \mathcal{N} oraz D .

Wskazówka. Dla różnicy $w := u - v$ wyprowadzić nierówność $|(\partial_t - \Delta)w| \leq C(n, \mathcal{N}, D)(|w| + |\nabla w|)$. Rozważyć największe $T_0 > 0$, dla którego żądane oszacowanie jest prawdziwe, a następnie uzyskać dolne ograniczenie przy pomocy Stwierdzenia 2.7.

Zadanie 4.3. Niech $u: B_1 \rightarrow \mathcal{N}$ będzie gładkim przekształceniem harmonicznym na kuli jednostkowej $B_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, czyli rozwiązaniem równania

$$-\Delta u = A_u(\nabla u, \nabla u).$$

Wyprowadzić formułę monotoniczną:

$$\Phi(r) := r^{2-n} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx, \quad \Phi'(r) = 2 \int_{\partial B_r} \frac{|\partial_r u|^2}{|x|^{n-2}} dx \geq 0.$$

Wskazówka. Zastosować tę samą strategię co w Lemacie 4.6.

Zadanie 4.4. Wykazać, że w przypadku jednowymiarowym rozwiązanie $u: [0, T_{\max}) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N}$ uzyskane w Twierdzenie 4.1 zawsze jest określone na całej półprostej $[0, \infty)$, tzn. $T_{\max} = \infty$.

Wskazówka. Wzór Bochnera.

Zadanie 4.5. Dla funkcji gładkiej $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ wyprowadzić wzór Bochnera

$$-\Delta \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) = -|\nabla^2 u|^2 - \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle.$$

Wynioskować, że jeśli u jest funkcją harmoniczną (czyli $-\Delta u = 0$), to

$$\max_{x \in B_1} |\nabla u(x)| = \max_{x \in \partial B_1} |\nabla u(x)|.$$

Rozdział 5

Przykłady osobliwości i kluczowe lematy techniczne

5.1 Przykład Chang-Ding-Ye w dwóch wymiarach

Ta sekcja poświęcona jest przykładowi z artykułu Changa, Dinga i Ye [CDY92] (zob. również [LW08, Ch. 6.3]). Na zajęciach temat ten referował Łukasz Chomienia, ale rozumowanie poniżej spisałem ja, więc zażalenia w sprawie znalezionych błędów proszę kierować do mnie.

Twierdzenie 5.1. *Istnieje przekształcenie początkowe $u_0: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ klasy C^1 postaci*

$$u_0(r, \theta) = \left(e^{i\theta} \sin h_0(r), \cos h_0(r) \right) \quad \text{w zmiennych biegunowych } (r, \theta) \in [0, 1] \times [0, 2\pi],$$

dla którego rozwiązanie (HMF) (z warunkiem brzegowym Dirichleta $u_t(x) = u_0(x)$ dla $x \in \partial\mathbb{B}^2$) wybucha w skończonym czasie.

Należałoby wspomnieć, że Twierdzenie 4.1 sformułowaliśmy dla funkcji gładkich, ale dla jego dowodu istotne jest tylko ograniczenie na pierwsze pochodne. W związku z tym rozumowanie nie wymaga zmian w przypadku $u_0 \in C^1$ (a nawet $u_0 \in \text{Lip}$).

Twierdzenie 4.1 wymaga za to modyfikacji, jeśli chodzi o rozwiązanie (HMF) z warunkiem brzegowym

Dowód. Odnotujmy symetrię obrotową przekształcenia u_0 . Jeśli przez $R_\alpha^{(2)}$ i $R_\alpha^{(3)}$ oznaczmy obroty o kąt α :

$$\begin{aligned} R_\alpha^{(2)}: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, & R_\alpha^{(2)}(z) &= e^{i\alpha} z, \\ R_\alpha^{(3)}: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & R_\alpha^{(3)}(z, x) &= (e^{i\alpha} z, x), \end{aligned}$$

to łatwo zauważyć, że $u_0(R_\alpha^{(2)} z) = R_\alpha^{(3)} u_0(z)$. Wynika stąd podobna symetria dla przekształcenia u rozwiązującego (HMF). Zauważmy mianowicie, że przekształcenie $v_t(z) := R_{-\alpha}^{(3)} u_t(R_\alpha^{(2)} z)$ również rozwiązuje (HMF) – gdyż równanie to jest niezmiennicze ze względu na złożenie z izometrią dziedziny \mathbb{B}^2 lub przeciwdziedziny \mathbb{S}^2 – a ponadto ma te same dane początkowe

$$v_0(z) = R_{-\alpha}^{(3)} u_0(R_\alpha^{(2)} z) = u_0(z)$$

na mocy symetrii u_0 . Z jednoznaczności rozwiązań wnioskujemy $v_t \equiv u_t$, a w rezultacie – symetrię $u_t(R_\alpha^{(2)}z) = R_\alpha^{(3)}u_t(z)$ dla $t > 0$. Można pokazać [CD91, Lemma 2.2], że u ma w konsekwencji tę samą postać co u_0 :

$$u_t(r, \theta) = \left(e^{i\theta} \sin h_t(r), \cos h_t(r) \right)$$

dla pewnej funkcji h spełniającej:

$$\begin{cases} h_0(r) = h_0(r), \\ h_t(1) = h_0(1), \\ h_t(0) = 0. \end{cases}$$

Pierwsze dwa warunki kodują warunek początkowy i warunek brzegowy. Trzeci wynika z ciągłości oraz konwencji. Otóż ciągłość u_t wymusza warunek $\sin h_t(0) = 0$ (czyli $h_t(0) \in \pi\mathbb{Z}$), więc dla ustalenia uwagi przyjmujemy $h_t(0) = 0$.

Zapiszemy teraz równanie (HMF) w terminach h . Zaczniemy od wyznaczenia $|\nabla u|^2$. Otóż w punkcie (r, θ) wektory ∂_r i $r^{-1}\partial_\theta$ tworzą bazę ortonormalną, więc $|\nabla u|^2$ możemy wyznaczyć przez obliczenie tych dwóch pochodnych kierunkowych:

$$\begin{aligned} \partial_r u &= \left(e^{i\theta} \cos h \cdot \partial_r h, -\sin h(r) \cdot \partial_r h \right), \\ |\partial_r u|^2 &= \cos^2 h \cdot (\partial_r h)^2 + \sin^2 h \cdot (\partial_r h)^2 = (\partial_r h)^2, \\ \partial_\theta u &= \left(i e^{i\theta} \sin h, 0 \right), \\ |r^{-1}\partial_\theta u|^2 &= r^{-2} \sin^2 h, \\ |\nabla u|^2 &= |\partial_r u|^2 + |r^{-1}\partial_\theta u|^2 = (\partial_r h)^2 + \frac{\sin^2 h}{r^2}. \end{aligned}$$

Energia Dirichleta przyjmuje więc postać

$$E(u_t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left((\partial_r h)^2 + \frac{\sin^2 h}{r^2} \right) r \, d\theta \, dr = \pi \int_0^1 \left((\partial_r h)^2 + \frac{\sin^2 h}{r^2} \right) r \, dr.$$

Z nierówności energetycznej (Lemat 4.3) wiemy, że $E(u_t)$ jest funkcją nierosnącą, więc w szczególności otrzymujemy (dla dowolnego ustalonego $\delta > 0$)

$$\int_\delta^1 (\partial_r h_t)^2 \, dr \leq \frac{1}{\pi\delta} E(u_0) \quad \text{dla } t > 0.$$

Z tego ograniczenia na pochodną łatwo wywnioskować, że h_t jest funkcją hölderowsko ciągłą, i w konsekwencji to samo jest prawdą dla u_t :

$$\|u_t\|_{C^{1/2}(B_1 \setminus B_\delta)} \lesssim \|h_t\|_{C^{1/2}([\delta, 1])} \lesssim C(E(u_0), \delta),$$

i to w sposób jednostajny względem $t > 0$. Jednostajna ciągłość wyklucza powstanie osobliwości w obszarze $B_1 \setminus B_\delta$ (choć nie dowodziliśmy tego twierdzenia na zajęciach). W związku z tym będziemy dowodzić, że wybuch pochodnej następuje w zerze.

Pozostaje powołać się na postać laplasjanu we współrzędnych kierunkowych

$$\Delta u = \partial_{rr} u + r^{-1}\partial_r u + r^{-2}\partial_{\theta\theta} u,$$

i bezpośrednio obliczenia pokazują wtedy, że równanie $(\partial_t - \Delta)u = |\nabla u|^2 u$ (HMF) przyjmuje postać

$$\partial_t h = \partial_{rr} h + \frac{\partial_r h}{r} - \frac{\sin(2h)}{2r^2} =: \tau(h).$$

Dla skrócenia zapisu operator różniczkowy po prawej stronie oznaczmy przez $\tau(h)$.

Dokonałiśmy redukcji problemu do wykazania wybuchu w równaniu skalarnym jednej zmiennej przestrzennej. Ponieważ równania $\partial_t h = \tau(h)$ nie jesteśmy w stanie rozwiązać bezpośrednio, posłużymy się porównaniem z odpowiednio skonstruowanym *podrozwiązaniem*. W tym celu wprowadźmy rodzinę funkcji

$$\phi_\lambda: [0, 1] \rightarrow [0, \pi), \quad \phi_\lambda(r) := \arccos\left(\frac{\lambda^2 - r^2}{\lambda^2 + r^2}\right)$$

dla $\lambda > 0$. Można sprawdzić bezpośrednio, że $\tau(\phi_\lambda) \equiv 0$ na $(0, 1)$ (dla wszystkich $\lambda > 0$).

Alternatywne uzasadnienie opiera się na obserwacji, że rzut stereograficzny $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$ jest przekształceniem konforemnym. Można wykazać, że w związku z tym jest przekształceniem harmonicznym, czyli $-\Delta P = |\nabla P|^2 P$. Ponieważ P posiada tę samą symetrię obrotową co u , więc daje się zapisać przy użyciu funkcji skalarnej jednej zmiennej ϕ_1 , która spełnia $\tau(\phi_1) \equiv 0$ (można się samemu przekonać, że jest to funkcja ϕ_1 powyżej). Ponadto przeskalowane przekształcenie $P_\lambda(x) = P(x/\lambda)$ również jest harmoniczne, więc tak samo przeskalowana funkcja $\phi_\lambda(r) = \phi(r/\lambda)$ nadal spełnia $\tau(\phi_\lambda) \equiv 0$.

Od strony technicznej obserwacja ta pozwala na nieznacznie łatwiejsze uzasadnienie. Dużo ważniejsze jest jednak, że daje nam pewne pojęcie, skąd funkcja ϕ_λ się bierze.

Podamy teraz jawnym wzorem podrozwiązanie $\partial_t f \leq \tau(f)$, którego pochodna wybuchu w skończonym czasie. Funkcję f przyjmiemy w postaci

$$f_t(r) := \phi_{\lambda(t)}(r) + \phi_\mu(r^{1+\varepsilon}),$$

gdzie stałe $\mu, \varepsilon > 0$ oraz funkcja $\lambda(t) > 0$ zostaną stosownie dobrane (można przyjąć $\varepsilon = 1/2$).

Odnotujmy od razu, że niezależnie od tych parametrów przekształcenie $F_t(r, \theta) = (e^{i\theta} \sin f_t, \cos f_t)$ jest klasy C^1 . Zauważmy też, że

$$\frac{\mu^2 - r^{2+2\varepsilon}}{\mu^2 + r^{2+2\varepsilon}} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 1$$

jednostajnie dla wszystkich $r \in [0, 1]$. Dobierzmy więc $\mu(\varepsilon) > 0$ na tyle duże, by

$$\cos(\phi_\mu(r^{1+\varepsilon})) = \frac{\mu^2 - r^{2+2\varepsilon}}{\mu^2 + r^{2+2\varepsilon}} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \quad \text{dla } r \in [0, 1].$$

Odnotujmy też, że na mocy jedynki trygonometrycznej sinus tego samego kąta wyraża się wzorem $\frac{2\mu r^{1+\varepsilon}}{\mu^2 + r^{2+2\varepsilon}}$. Aby obliczyć $\tau(f)$, zauważmy najpierw, że człon $\kappa(r) := \phi_\mu(r^{1+\varepsilon})$ prawie spełnia $\tau(\kappa) \equiv 0$:

$$\partial_{rr} \kappa + \frac{\partial_r \kappa}{r} - \frac{(1 + \varepsilon)^2 \sin(2\kappa)}{2r^2} = 0.$$

W związku z tym otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \partial_{rr}f + \frac{\partial_r f}{r} - \frac{\sin(2f)}{2r^2} \\ &= \left(\partial_{rr}\phi_\lambda + \frac{\partial_r\phi_\lambda}{r} \right) + \left(\partial_{rr}\kappa + \frac{\partial_r\kappa}{r} \right) - \frac{\sin(2(\phi_\lambda + \kappa))}{2r^2} \\ &= \frac{\sin(2\phi_\lambda) + (1 + \varepsilon)^2 \sin(2\kappa) - \sin(2(\phi_\lambda + \kappa))}{2r^2}\end{aligned}$$

Korzystając ze wzorów na sinus sumy i różnicę sinusów, a następnie z $\cos \kappa \geq (1 + \varepsilon)^{-1}$, szacujemy teraz

$$\begin{aligned}\tau(f) &= \frac{(1 + \varepsilon)^2 \cos \kappa \sin \kappa - \cos(2\phi_\lambda + \kappa) \sin \kappa}{r^2} \\ &\geq \frac{(1 + \varepsilon) - \cos(2\phi_\lambda + \kappa)}{r^2} \sin \kappa \\ &\geq \varepsilon r^{-2} \cdot \sin \kappa \\ &= \varepsilon r^{-2} \cdot \frac{2\mu r^{1+\varepsilon}}{\mu^2 + r^{2+2\varepsilon}} \\ &\geq \frac{2\mu\varepsilon}{\mu^2 + 1} \cdot r^{\varepsilon-1}.\end{aligned}$$

Za λ przyjmijmy teraz rozwiązanie równania zwyczajnego $\lambda'(t) = -\delta\lambda^\varepsilon(t)$, przy czym parametry $\delta, \lambda_0 > 0$ dobierzemy później (można przyjąć $\lambda_0 = 1$). Równanie to posiada jawne rozwiązanie

$$\lambda(t) = \left(\lambda_0^{1-\varepsilon} - (1 - \varepsilon)\delta t \right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}},$$

które zbiega do zera w skończonym czasie $T = \frac{\lambda_0^{1-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)\delta}$ (wzór na f przestaje mieć sens w chwili T). Obliczamy też bezpośrednio

$$\partial_r f_t(0) = \frac{2}{\lambda(t)} \xrightarrow{t \nearrow T} \infty,$$

a więc pochodna $\partial_r f_t$ wybucha w skończonym czasie.

Możemy teraz sprawdzić, że f jest podrozwiązaniem. Pochodną czasową wyznaczamy jako

$$\begin{aligned}\partial_t f &= -\frac{2r}{\lambda^2 + r^2} \cdot \lambda' \\ &= \frac{2r}{\lambda^2 + r^2} \cdot \delta\lambda \\ &= 2\delta r^{\varepsilon-1} \cdot \frac{r^{2-\varepsilon}\lambda^\varepsilon}{\lambda^2 + r^2} \\ &= 2\delta r^{\varepsilon-1} \cdot \frac{(r/\lambda)^{2-\varepsilon}}{1 + (r/\lambda)^2} \\ &\leq C(\varepsilon) \cdot \delta r^{\varepsilon-1}.\end{aligned}$$

Gdzie w tym rachunku okazuje się istotne, że w równaniu $\lambda' = -\delta\lambda^\varepsilon$ występuje wykładnik ε ?

Do jej oszacowania wykorzystaliśmy fakt, że funkcja $\frac{s^{2-\varepsilon}}{1+s^2}$ jest ograniczona na $[0, \infty)$ przez stałą zależną jedynie od $\varepsilon > 0$. W rezultacie

$$\partial_t f - \tau(f) \leq \left(C(\varepsilon)\delta - \frac{2\mu\varepsilon}{\mu^2 + 1} \right) r^{\varepsilon-1} < 0 \quad \text{dla } r \in (0, 1),$$

o ile tylko wartość $\delta(\varepsilon, \mu) > 0$ jest dobrana odpowiednio mała.

Skorzystamy teraz z zasady porównawczej dla operatora parabolicznego $\partial_t - \tau$. Trzeba jednak skonstruować funkcję h_0 tak, by $f_0(r) \leq h_0(r)$ dla $r \in [0, 1]$ oraz $f_t(1) \leq h_0(1)$ dla $t \geq 0$. Ze względu na drugi z tych warunków nie możemy przyjąć $h_0 := f_0$. Zauważmy jednak, że $f_t(1)$ nie przekracza wartości 2π , wystarczy więc przyjąć

$$h_0(r) := f_0(r) + 2\pi \cdot r.$$

W ten sposób spełnione są oba warunki. Z zasady porównawczej dla operatora $\partial_t - \tau$ (zadanie 5.1) wnioskujemy więc, że $f_t(r) \leq h_t(r)$ dla $r \in [0, 1]$ i wszystkich $t \geq 0$. Ze względu na więzy $h_t(0) = 0 = f_t(0)$ oznacza to jednak

$$\partial_r h_t(0) \geq \partial_r f_t(0) \xrightarrow{t \nearrow T} \infty,$$

co daje $|\nabla u_t(0)| \xrightarrow{t \nearrow T} \infty$ i tym samym kończy dowód. \square

5.2 Przykład Chen-Ding w trzech wymiarach

Opisany tu przykład pochodzi od Chen i Dinga [CD90] (zob. też [LW08, Ch. 7.3]). Opiera się on na twierdzeniu o ε -regularności (Twierdzenie 5.6), którego dowiedziemy w następnym rozdziale, oraz na wyborze odpowiednich danych początkowych. Jako przekształcenie początkowe dobierzemy mianowicie gładkie przekształcenie $u_0: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, które jest homotopijnie nietrywialne, a jednocześnie spełnia

$$\inf \left\{ E(u) : u \in C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N}), u \sim u_0 \right\} = 0.$$

Istnienie takiego u_0 jest raczej nieintuicyjne, gdyż mała energia u oznacza bliskość do przekształcenia stałego, co jest trudne do połączenia z nietrywialnym typem homotopijnym.

Żeby uprościć rozważania, podamy bardzo konkretny przykład u_0 . Zaczniemy od słynnego przekształcenia Hopfa¹ H . Można je otrzymać, rozważając konstrukcję zespolonej prostej rzutowej

$$\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}P^1, \quad \text{gdzie } (z, w) \sim (\lambda z, \lambda w) \text{ dla } \lambda \neq 0.$$

Obcinając to przekształcenie do sfery jednostkowej $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ i używając utożsamienia $\mathbb{C}P^1$ z \mathbb{S}^2 , otrzymujemy przekształcenie $H: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Można je też opisać bezpośrednim wzorem

$$\mathbb{C}^2 \supseteq \mathbb{S}^3 \ni (z, w) \longmapsto H(z, w) = (2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2) \in \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R}.$$

Przekształcenie H ma postać $H(z, w) = z/w \in \bar{\mathbb{C}}$, jeśli rozszerzoną płaszczyznę zespoloną $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ utożsamimy ze sferą.

¹Heinz Hopf (1894-1971), niemiecki matematyk urodzony w dzisiejszym Grabiszynie (dzielnicy Wrocławia)

Przyjmijmy teraz bez dowodu, że przekształcenie Hopfa $H: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ jest homotopijnie nietrywialne. W książce Hatchera [Hat02, Ch. 4.B] można znaleźć dowód oparty na teorii kohomologii, a w znanej i lubianej książeczce Milnora [Mil97] – dowód sięgający po narzędzia topologii różniczkowej i geometryczną konstrukcję niezmiennika Hopfa. W tym drugim istotne jest, że przeciwobraz każdego punktu $H^{-1}(p)$ jest okręgiem, a dla dwóch różnych punktów $p, q \in \mathbb{S}^2$ odpowiednie okręgi zawsze tworzą nietrywialny splot w \mathbb{S}^3 .

Tak samo można zmodyfikować dowolne przekształcenie z \mathbb{S}^3 w \mathbb{S}^2 .

Przekształcenie Hopfa można homotopijnie zmodyfikować, by miało dowolnie małą energię:

Lemat 5.2. *Dla dowolnego ε istnieje gładkie przekształcenie $u: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ homotopijne z H , dla którego $E(u) \leq \varepsilon$.*

Zgodnie z [LW08, Th. 7.3.1], jeśli $u_0: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ jest gładkim przekształceniem między dwiema zamkniętymi rozmaitościami Riemanna, to następujące warunki są równoważne:

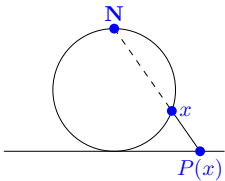
- istnieją gładkie przekształcenia homotopijne z u_0 o dowolnie małej energii;
- obcięcie u_0 do 2-szkieletu \mathcal{M} jest homotopijnie trywialne.

I można sprawdzić, że H spełnia ten drugi warunek. Ten konkretny przypadek można jednak łatwo zweryfikować bezpośrednio.

Dowód. Argument opiera się na różnicy wymiarów – skalowanie $H_r(x) := H(x/r)$ w trzech wymiarach ma własność $\int_{B_r} |\nabla H_r|^2 = r \int_{B_1} |\nabla H|^2$, więc dla małych r energia H_r może być dowolnie mała. Żeby móc wprowadzić skalowanie, trzeba jednak najpierw przejść z \mathbb{S}^3 do \mathbb{R}^3 przy użyciu jakiejś mapy.

Oznaczmy biegun północny $\mathbf{N} = (0, 0, 0, 1)$. Przekształcenie H można gładko zmodyfikować na małym otoczeniu \mathbf{N} do przekształcenia \hat{H} , które jest stałe (stałe równe $H(\mathbf{N}) = (0, 0, -1)$) na pewnym otoczeniu tego punktu. Następnie na dopełnieniu \mathbf{N} wprowadźmy rzut stereograficzny P – jest to dyfeomorfizm $P: \mathbb{S}^3 \setminus \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadany wzorem

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{2}{1 - x_4} \cdot (x_1, x_2, x_3).$$



Do złożenia $G = \hat{H} \circ P^{-1}$, $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, możemy już zastosować zapowiedziane skalowanie. Przekształcenie G jest stałe poza pewną dużą kulą B_R , więc przekształcenie przeskalowane $G_r(x) := G(x/r)$ jest stałe poza B_{Rr} i mamy

$$\int_{B_{Rr}} |\nabla G_r|^2 = r \int_{B_R} |\nabla G|^2.$$

Dla małych r ta energia jest dowolnie mała. Ponieważ pochodne P są jednostajnie ograniczone na przeciwobrazie B_R (czyli poza \mathbf{N}), złożenie $u := G_r \circ P$ również ma dowolnie małą energię. Jednocześnie ciągła modyfikacja parametru r pokazuje, że przekształcenie u jest homotopijne z \hat{H} (a w rezultacie również z H). \square

Jeśli przyjmijmy skonstruowane powyżej przekształcenie u jako początkowe, potok przekształceń harmonicznych musi wykształcić osobliwości w skończonym czasie:

Twierdzenie 5.3. *Niech \mathcal{M}, \mathcal{N} będą dwiema zamkniętymi rozmaitościami Riemanna. Wówczas dla każdego $T > 0$ istnieje stała $\varepsilon(\mathcal{M}, \mathcal{N}, T) > 0$ o następującej własności: jeśli $u_0: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ jest gładkim i homotopijnie nietrywialnym przekształceniem spełniającym $E(u_0) \leq \varepsilon$, to dowolne gładkie rozwiązanie u (HMF) o danych początkowych u_0 wybucha po czasie T lub wcześniej.*

Dowód. Przypuśćmy, że istnieje gładkie rozwiązanie $u: [0, T] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ z warunkiem początkowym u_0 . O ile tylko energia początkowa $E(u_0)$ jest wystarczająco mała, to dla każdego $z = (t, x) \in [T/2, T] \times \mathcal{M}$ mamy

$$\Phi_z(T/2) \lesssim (T/2) \cdot (T/2)^{-n/2} \cdot \int_{\mathcal{M}} |\nabla u_{t-T/2}|^2 dy \lesssim T^{\frac{2-n}{2}} E(u_0) \leq \varepsilon_0^2,$$

gdzie ε_0 jest wartością z twierdzenia o ε -regularności (Twierdzenie 5.6). W konsekwencji

$$|\nabla u(t, x)| \leq C(\mathcal{M}, \mathcal{N}, T) \quad \text{dla } t \in [T/2, T], x \in \mathcal{M}.$$

Skorzystamy teraz (podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 5.6) ze wzoru Bochnera (Wniosek 4.8) i parabolicznej nierówności Harnacka (Wniosek 5.5). W ogólnej postaci wzór Bochnera daje

$$(\partial_t - \Delta)e(u) \leq \text{Ric}^{\mathcal{M}}(\nabla u, \nabla u) + \text{Rm}^{\mathcal{N}}(\nabla u, \nabla u, \nabla u, \nabla u) \leq C(\mathcal{M}, \mathcal{N})e(u)(1 + e(u))$$

W kontekście oszacowania $e(u) \leq C(\mathcal{M}, \mathcal{N}, T)$ możemy stąd wywnioskować nierówność $(\partial_t - \Delta)e(u) \lesssim e(u)$ na $[T/2, T] \times \mathcal{M}$, jak w założeniu parabolicznej nierówności Harnacka. Wnioskujemy więc, że

$$e(u)(T, x) \lesssim \int_{[T/2, T] \times \mathcal{M}} |\nabla u|^2 dx dt \lesssim E(u_0) \quad \text{dla } x \in \mathcal{M}.$$

Okazało się, że $|\nabla u_T(x)| \lesssim \varepsilon$, a więc u_T jest przekształceniem o bardzo małej stałej Lipschitza. Jeśli ε dobierzemy odpowiednio małe (zależnie od $\mathcal{M}, \mathcal{N}, T$), to u_T ma obraz w małym ściągającym fragmencie \mathcal{N} , i w rezultacie musi być przekształceniem homotopijnie trywialnym.

Z drugiej strony, potok przekształceń harmonicznych u zadaje gładką homotopię pomiędzy u_0 i u_T , co wyklucza trywialność u_T . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że maksymalny czas istnienia gładkiego rozwiązania jest krótszy niż T . \square

5.3 Paraboliczna nierówność Harnacka

Sformułowanie twierdzenia

Jak przekonaliśmy się w rozdziale 4.3, dla rozwiązań (HMF) jesteśmy w stanie dobrze kontrolować normę L^2 gradientu, a nawet lokalną normę L^2 ($\Phi_{(t_0, x_0)}(r^2; u)$ mierzy mniej więcej $r^{2-n} \int_{B_r(x_0)} |\nabla u_{t_0-r^2}|^2$). Nie powinno to być zaskakujące, skoro (HMF) odpowiada potokowi gradientowemu funkcjonału $E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2$. Jednak zgodnie z Twierdzeniem 4.1 to norma L^∞ gradientu decyduje o istnieniu lub nie gładkich rozwiązań – ograniczoność $\|\nabla u_t\|_\infty$ gwarantuje możliwość przedłużenia, natomiast wybuch $\|\nabla u_t\|_\infty$ w oczywisty sposób przedłużenie uniemożliwia.

Tę lukę nie zawsze da się wypełnić (temu też zawdzięczamy osobliwości), ale w tych przypadkach, w których się da, zawdzięczamy to tzw. parabolicznej nierówności Harnacka². Nazwisko Harnacka wskazuje tu jedynie na typ twierdzenia (analogiczny do twierdzenia Harnacka dla funkcji harmoniczych), lecz samo twierdzenie pochodzi od Mosera³ [Mos64].

Twierdzenie 5.4. Niech $u \in C^\infty(P_R(z_0))$ będzie nieujemną funkcją na parabolicznym cylindrze

$$P_R(z_0) = \{z = (t, x) : |x - x_0| \leq R, t_0 - R^2 \leq t \leq t_0\},$$

spełniającą $(\partial_t - \Delta)u \leq 0$ w $P_R(z_0)$. Wówczas

$$u(z_0) \lesssim R^{-(n+2)} \int_{P_R(z_0)} u \, dx \, dt.$$

W większości przypadków interesować nas będzie następujący bezpośredni wniosek:

Wniosek 5.5. Niech $u \in C^\infty(P_R(z_0))$ będzie nieujemną funkcją spełniającą $(\partial_t - \Delta)u \leq Au$ w $P_R(z_0)$. Wówczas

$$u(z_0) \lesssim e^{AR^2} \cdot R^{-(n+2)} \int_{P_R(z_0)} u \, dx \, dt.$$

Dowód Wniosku. Rozważmy funkcję pomocniczą $v(t, x) = e^{-A(t-t_0)}u(t, x)$. Łatwo sprawdzić, że z warunku $(\partial_t - \Delta)u \leq Au$ wynika $(\partial_t - \Delta)v \leq 0$, więc do funkcji v możemy zastosować paraboliczną nierówność Harnacka (Twierdzenie 5.4). Ponieważ $v(z_0) = u(z_0)$ oraz

$$v(t, x) = e^{-A(t-t_0)}u(t, x) \leq e^{AR^2}u(t, x) \quad \text{dla } (t, x) \in P_R(z_0),$$

wnioskujemy podobną nierówność dla u . □

Zanim przejdziemy do głównego dowodu, warto popełnić pewną dygresję. Sformułowanie Twierdzenia 5.4 zostało zaczerpnięte z książki Lina i Wanga [LW08, Lem. 5.3.4], nie ma tam jednak dowodu. Autorzy odsyłają do oryginalnej pracy Mosera oraz książki Liebermanna, być może mając na myśli [Mos64, Th. 3] i [Lie96, Th. 6.17], ale trudno powiedzieć – w obu przypadkach rozważane są równania paraboliczne w ogólniejszej postaci, a sformułowania nie implikują bezpośrednio Twierdzenia 5.4.

Odnalezienie w literaturze Twierdzenia 5.4 jest o tyle utrudnione, że wielu autorów przez *paraboliczną nierówność Harnacka* rozumie oszacowanie w przeciwną stronę. W związku z tym poniżej prezentuję własne rozumowanie, licząc się z tym, że zapewne nie jest ono optymalnym rozwiązaniem problemu.

Jeśli ktoś znajdzie związany dowód w literaturze, proszę mi dać znać!

Wycieczka w stronę probabilistyki

Tutaj przytoczę jedynie potrzebne oznaczenia i najważniejsze fakty, ale należy liczyć się z pominięciem pewnych istotnych szczegółów (nawet w definicjach). Po właściwym wstępie do analizy stochastycznej warto sięgnąć do skryptu Latały [Lat11], a szersze omówienie procesu Wienera można znaleźć w książce Jakubowskiego i Sztencła [JS10].

²Karl Gustaw Axel Harnack (1851-1888), niemiecki matematyk

³Jürgen Kurt Moser (1928-1999), niemiecki matematyk

Przypomnijmy, że proces Wienera to rodzina zmiennych losowych $(W_t)_{t \geq 0}$ o następujących własnościach [JS10, Rozdz. 13], [Lat11, Def. 1.5]:

- $W_0 = 0$ prawie na pewno;
- W ma przyrosty niezależne, czyli dla dowolnych $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ zmienne losowe $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ są niezależne;
- dla dowolnych $0 \leq s < t$ zmienna $W_t - W_s$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}(0, t - s)$ (o średniej 0 i wariancji $t - s$);
- trajektorie W są ciągłe prawie na pewno, to znaczy dla \mathbb{P} -p.w. ω funkcja $t \mapsto W_t(\omega)$ jest ciągła.

Interesujący nas związek między procesem Wienera a równaniem ciepła jest wnioskiem ze wzoru Itô [Lat11, Tw. 13.2]: dla funkcji $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 oraz d -wymiarowego ciągłego semimartynała $Z = Z_0 + M + A$ zachodzi równość

$$u(Z_t) = u(Z_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i u(Z_s) dZ_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_{ij} u(Z_s) d\langle M^i, M^j \rangle_s.$$

Jako Z rozważymy n -wymiarowy proces Wienera $W = (W^1, \dots, W^n)$ (równoważnie, n niezależnych kopii procesu jednowymiarowego) wzbogacony o proces deterministyczny $-t$. W takim przypadku:

$$u(-t, W_t) = u(0, 0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \partial_i u(-s, W_s) dW_s^i - \int_0^t (\partial_t - \frac{1}{2} \Delta) u(-s, W_s) ds.$$

Całka względem dW_s^i jest martynałem startującym z zera, więc znika po wzięciu wartości oczekiwanej:

$$\mathbb{E} u(-t, W_t) = u(0, 0) - \mathbb{E} \int_0^t (\partial_t - \frac{1}{2} \Delta) u(-s, W_s) ds.$$

Gdy η jest ograniczonym momentem stopu, na mocy twierdzenia Dooba⁴ [JS10, Tw. 11.2.8] otrzymujemy podobną równość:

$$\mathbb{E} u(-\eta, W_\eta) = u(0, 0) - \mathbb{E} \int_0^\eta (\partial_t - \frac{1}{2} \Delta) u(-s, W_s) ds.$$

Widać, że operator ciepła $(\partial_t - \frac{1}{2} \Delta)u$ pojawia się w tym kontekście naturalnie, chociaż z czynnikiem $1/2$ przy laplasjanie. Łatwo to poprawić, rozważając funkcję $u(2t, x)$ w miejsce $u(t, x)$, ale dla przejrzystości zapisu zignorujemy tę różnicę.

Załóżmy, że u jest podrozwiązaniem równania ciepła (jak w założeniu Twierdzenia 5.4), ale w postaci $(\partial_t - \frac{1}{2} \Delta)u \leq 0$. Wówczas ostatnia z tożsamości daje nam

$$u(0, 0) \leq \mathbb{E} u(-\eta, W_\eta). \tag{5.1}$$

Żeby skorzystać z (5.1), pozostaje dobrać odpowiedni moment stopu η .

Nierówność (5.1) ma już żadaną postać: wartość $u(0, 0)$ jest szacowana przez średnią z u po pewnym zbiorze

⁴Joseph Leo Doob (1910-2004), amerykański matematyk

Zacznijmy od wprowadzenia momentu stopu τ dla jednowymiarowego procesu Wienera W_t :

$$\tau = \min\{t > 0 : W_t \geq 1\};$$

jest to pierwszy moment dojścia do wartości 1. Rozkład τ można wyznaczyć przy pomocy *zasady odbicia* (zob. [JS10, Tw. 13.3.1] oraz [JS10, Tw. 13.4.1, Zad. 13.4.4]). Mówi ona w przybliżeniu, że jeśli proces W_t dojdzie do jedynki, to jego dalszy ruch jest symetryczny względem punktu $x = 1$. W szczególności, jeśli moment τ nadejdzie przed czasem t , to w momencie t z równym prawdopodobieństwem proces znajduje się po lewej i prawej stronie jedynki:

$$\mathbb{P}(\tau \leq t, W_t \geq 1) = \mathbb{P}(\tau \leq t, W_t \leq 1).$$

Tymczasem pierwsze z tych prawdopodobieństw to po prostu $\mathbb{P}(W_t \geq 1)$, gdyż warunek $W_t \geq 1$ pociąga za sobą $\tau \leq t$. W rezultacie:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau \leq t) &= 2\mathbb{P}(W_t \geq 1) = 2 \int_1^\infty (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/2t} dx \\ &= 2 \int_{t^{-1/2}}^\infty (2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2} dy \end{aligned}$$

Pozwala to wyznaczyć gęstość zmiennej τ :

$$g_\tau(t) = \partial_t \mathbb{P}(\tau \leq t) = (2\pi)^{-1/2} e^{-y^2/2} \Big|_{y=t^{-1/2}} \cdot t^{-3/2} = (2\pi)^{-1/2} e^{-1/2t} t^{-3/2}.$$

Zauważmy, że jest to funkcja ograniczona.

Wprowadźmy teraz kostkę paraboliczną

$$C = \{(t, x) : t \in [-1, 0], |x_i| \leq 1 \text{ dla } i = 1, \dots, n\}.$$

Moment stopu η definiujemy jako moment dojścia procesu $(-t, W_t)$ do $\partial_P C$ (brzegu parabolicznego C), czyli minimum z momentów $\tau_0, \tau_{\pm 1}, \dots, \tau_{\pm n}$ dojścia do poszczególnych ścianek. Można przyjąć:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1, \quad \text{oraz dla } i = 1, 2, \dots, n : \\ \tau_i &= \min\{t > 0 : W_t^i \geq 1\}, \quad \tau_{-i} = \min\{t > 0 : W_t^i \leq -1\}. \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że $\tau_{\pm i}$ mają ten sam rozkład co τ . Wykażemy teraz, że rozkład $(-\eta, W_\eta)$ na $\partial_P C$ ma ograniczoną gęstość względem miary powierzchniowej. Zacznijmy od *dolnego denka*, czyli zbioru $\{(t, x) \in \partial_P C : t = -1\}$. Dla dowolnego mierzalnego podzbioru $U = \{-1\} \times V$ mamy

$$\mathbb{P}((-\eta, W_\eta) \in U) = \mathbb{P}(\eta = 1, W_1 \in V) \leq \mathbb{P}(W_1 \in V).$$

Ponieważ rozkład W_1 na \mathbb{R}^n ma ograniczoną gęstość, tym bardziej jest to prawdą dla rozkładu (η, W_η) na $\{(t, x) \in \partial_P C : t = -1\}$.

Podobnie jest dla pozostałej części brzegu. Dla ustalenia uwagi rozważmy ściankę $\{(t, x) \in \partial_P C : x_1 = 1\}$ i zawarty w niej zbiór mierzalny $U = V_0 \times \{1\} \times V$. Podobnie jak poprzednio:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((-\eta, W_\eta) \in U) &= \mathbb{P}(\eta = \tau_1, (-\tau_1, 1, W_{\tau_1}^2, \dots, W_{\tau_1}^n) \in U) \\ &\leq \mathbb{P}(-\tau_1 \in V_0, (W_{\tau_1}^2, \dots, W_{\tau_1}^n) \in V) \\ &= \int_{V_0 \times V} g_\tau(-t) g_{(W_t^2, \dots, W_t^n)}(y) dt dy. \end{aligned}$$

Gdy zamiast pary $(-\tau_1, W_{\tau_1})$ interesował nas sam wektor W^{τ_1} , to odpowiedni rozkład wyznaczony jest w zadaniu 5.2.

Raz jeszcze możemy skonkludować, że gęstość rozkładu jest funkcją ograniczoną.

Jako podsumowanie powyższych rozważań otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$\mathbb{E} u(-\eta, W_\eta) = \int_{\partial_P C} u(z) g_{(-\eta, W_\eta)}(z) dz \leq C(n) \int_{\partial_P C} u(z) dz, \quad (5.2)$$

o ile u jest funkcją nieujemną.

Dowód nierówności

Dowód Twierdzenia 5.4. Załóżmy (prawie jak w założeniu Twierdzenia), że $u \in C^\infty(C)$ jest nieujemnym podrozwiązaniem równania ciepła $(\partial_t - \frac{1}{2}\Delta)u \leq 0$ na zdefiniowanej wyżej kostce parabolicznej C .

Łącząc wniosek ze wzoru Itô (5.1) z oszacowaniem na rozkład $(-\eta, W_\eta)$ (5.2), otrzymujemy nierówność

$$u(0, 0) \leq \mathbb{E} u(-\eta, W_\eta) \leq C(n) \int_{\partial_P C} u(z) dz.$$

Przy użyciu skalowania można przenieść to rozumowanie na mniejsze kostki paraboliczne. W tym celu wprowadzimy oznaczenie

$$F: [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, x) = \max(\sqrt{-t}, |x_1|, \dots, |x_n|),$$

dzięki czemu

$$C_r := \{(t, x) : t \in [-r^2, 0], |x_i| \leq r\} = F^{-1}([0, r]), \quad \partial_P C_r = F^{-1}(r).$$

Dla $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ przeskalowana funkcja $u^{(r)}(t, x) = u(r^2 t, rx)$ jest nieujemnym podrozwiązaniem ciepła na C_1 , więc stosuje się do niej uzyskana przed chwilą nierówność. Porównując $u^{(r)}$ z u , mamy:

$$u(0, 0) = u^{(r)}(0, 0) \lesssim \int_{\partial_P C} u^{(r)}(z) dz \lesssim \int_{\partial_P C_r} u(z) dz.$$

Żeby uzyskać ograniczenie przez całkę po obszarze, wystarczy scałkować powyższą nierówność po wszystkich $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$. Ponieważ F spełnia warunek Lipschitza na $F^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$, ze wzoru na całkowanie po włóknach (ang. *coarea formula*) otrzymujemy

$$u(0, 0) \lesssim \int_{1/2}^1 \int_{F^{-1}(r)} u(z) dz dr \lesssim \int_{F^{-1}([1/2, 1])} u(z) dz \leq \int_C u(z) dz.$$

Ostatecznie $u(0, 0)$ ograniczyliśmy przez całkę po kostce parabolicznej C , która zawiera się w cylindrze parabolicznym $P_{\sqrt{n}}$. Żeby zastąpić go przez cylinder jednostkowy P_1 , możemy jeszcze raz zastosować skalowanie paraboliczne.

To kończy dowód twierdzenia dla $z_0 = (0, 0)$ oraz $R = 1$. Za pomocą przesunięcia i skalowania parabolicznego wnioskujemy analogiczną nierówność w ogólnym przypadku. \square

Jeśli ktoś nie kojarzy wzoru na całkowanie po włóknach, łatwo sobie poradzi, stosując twierdzenie Fubiniego dla każdej ze ścianek $\partial_P C_r$ z osobna

5.4 Twierdzenie o ε -regularności

Podstawowe w badaniu potoku przekształceń harmoniczych jest tzw. twierdzenie o ε -regularności. Mówi ono, że jeśli zachodzi $\Phi_{(0,0)}(R^2) \leq \varepsilon_0^2$, czyli mniej więcej nierówność

$$R^{2-n} \int_{B_R} |\nabla u_{-R}|^2 dx \leq \varepsilon_0^2,$$

to rozwiązanie u jest gładkie na pewnym otoczeniu punktu $(0,0)$ (wraz z jawnymi ograniczeniami na pochodne). Poniższe twierdzenie pochodzi z pracy Struwego [Str88, Th. 5.1]. Można je też znaleźć w [LW08, Prop. 7.1.4], jednak – według mojej najlepszej wiedzy – podane w tej książce mocniejsze sformułowanie jest nieprawdziwe, a dowód wadliwy.

Twierdzenia tego typu są powszechne w teorii nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Rozwiązania takich równań nie są regularne wszędzie, ale często są regularne warunkowo – przy założeniu małej energii w otoczeniu interesującego nas punktu. Stojąca za tym idea jest prosta – gdy energia jest *mała*, nieliniowy wyraz równania można w przybliżeniu traktować jak liniowy.

W dowodzie poniższego twierdzenia nietrudno znaleźć miejsce, w którym ta idea znajduje realizację (przy zastosowaniu wzoru Bochnera). Podobny motyw towarzyszył zresztą już Twierdzeniu 4.1 o lokalnym istnieniu gładkich rozwiązań.

Twierdzenie 5.6. *Istnieje stała $\varepsilon_0(n, \mathcal{N}) > 0$ taka, że jeśli $u: [-R^2, 0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{N}$ jest rozwiązaniem (HMF) oraz $\Phi_{(0,0)}(R^2) \leq \varepsilon_0^2$, to*

$$\sup_{P_{\delta R}} R |\nabla u| \leq C$$

dla pewnych dodatnich stałych δ, C zależnych od n, \mathcal{N} oraz $R^{2-n} E(u_{-R^2})$.

Tak jak poprzednio, przez $P_r(t_0, x_0)$ oznaczamy tu cylinder paraboliczny

$$P_r(t_0, x_0) = \left\{ (t, x) : t_0 - r^2 \leq t \leq t_0, |x - x_0| \leq r \right\},$$

i domyślnie $P_r \equiv P_r(0, 0)$.

Dowód. Oznaczmy $E_0 := E(u_{-R^2})$. Na mocy nierówności energetycznej (Lemat 4.3) mamy $E(u_t) \leq E_0$ dla wszystkich t . Rozważając przeskalowane przekształcenie (zob. Lemat 4.5), sprowadzamy problem do przypadku $R = 1$. Na jeden szczegół należy tylko uważać – ograniczenie na energię u_t wynosi teraz $R^{2-n} E_0$.

Weźmy $\delta > 0$ – dokładna wartość zostanie ustalona później. Tak jak we wzorze Bochnera, oznaczmy gęstość energii $e(u) := \frac{1}{2} |\nabla u|^2$. Funkcja

$$[\delta/2, \delta] \ni \rho \longmapsto (\delta - \rho)^2 \sup_{P_\rho} e(u)$$

jest ciągła i przyjmuje swoje maksimum w pewnym punkcie $\rho \in [\delta/2, \delta)$ (dla $\rho = \delta$ wartość jest zerowa). Ustalmy takie ρ , jak również punkt $z_0 = (t_0, x_0) \in P_\rho$, dla którego

$$e(u)(z_0) = \sup_{P_\rho} e(u) =: e_0.$$

Prostszym podejściem do konstrukcji z_0 byłaby maksymalizacja $e(u)$ w P_δ . Gdzie to podejście by zawiodło?

Możemy przyjąć, że $e_0 \geq \frac{4}{(\delta-\rho)^2}$. W przeciwnym przypadku mielibyśmy bowiem

$$(\delta/2)^2 \sup_{P_{\delta/2}} e(u) \leq (\delta - \rho)^2 \sup_{P_\rho} e(u) \leq 4,$$

co prowadzi do żądanego oszacowania $|\nabla u|$ na $P_{\delta/2}$ (trzeba tylko zweryfikować zależność δ od danych). Odnajdujemy, że z maksymalności ρ otrzymujemy m.in.

$$(\delta - \rho)^2 \sup_{P_\rho} e(u) \geq \left(\delta - \frac{\delta + \rho}{2} \right)^2 \sup_{P_{\frac{\delta+\rho}{2}}} e(u) = \frac{1}{4} (\delta - \rho)^2 \sup_{P_{\frac{\delta+\rho}{2}}} e(u),$$

a w konsekwencji $e_0 \geq \frac{1}{4} \sup_{P_{\frac{\delta+\rho}{2}}} e(u)$. Rozważmy teraz przeskalowane przekształcenie $v(t, x) := u(t_0 + \frac{t}{e_0}, x_0 + \frac{x}{\sqrt{e_0}})$. Wprost z określenia mamy $e(v)(0, 0) = 1$ oraz

$$\sup_{P_1} e(v) = e_0^{-1} \sup_{P_{e_0^{-1/2}(z_0)}} e(u) \leq e_0^{-1} \sup_{P_{\frac{\delta+\rho}{2}}} e(u) \leq e_0^{-1} \cdot 4e_0 = 4,$$

zgodnie z wcześniejszą obserwacją. Przypomnijmy teraz wzór Bochnera (Wniosek 4.8), który daje

$$(\partial_t - \Delta)e(v) \leq \text{Rm}(\nabla v, \nabla v, \nabla v, \nabla v) \leq C(\mathcal{N})|\nabla v|^4.$$

W kontekście oszacowania $e(v) \leq 4$ możemy stąd wywnioskować nierówność $(\partial_t - \Delta)e(v) \lesssim e(v)$ w P_1 , jak w założeniu parabolicznej nierówności Harnacka (Wniosek 5.5). Wnioskuje-
my więc, że

$$1 = e(v)(0, 0) \lesssim \int_{P_1} e(v) \, dx \, dt = e_0^{n/2} \int_{P_{e_0^{-1/2}(z_0)}} e(u) \, dx \, dt.$$

Nierówność ta doprowadzi nas do sprzeczności z założeniem $\Phi(1) \leq \varepsilon_0^2$.

Oznaczmy $z_1 = (t_1, x_1) = z_0 + (e_0^{-1}, 0)$. Wtedy na mocy formuły monotonicznej (Lemat 4.6) mamy

$$\begin{aligned} 1 &\lesssim \int_{P_{e_0^{-1/2}(z_0)}} e(u)(x) \rho_{t_1-t}(x - x_1) \, dx \, dt \\ &\leq \int_{t_0 - e_0^{-1}}^{t_0} H_{t_1-t} |\nabla u_t|^2(x_1) \, dt \\ &\leq \int_{t_0 - e_0^{-1}}^{t_0} \Phi_{z_1}(t_1 - t) \, dt \\ &\leq \Phi_{z_1}(1 + t_1). \end{aligned}$$

Pozostaje nam porównać wielkości

$$\Phi_{z_1}(1 + t_1) = (1 + t_1) H_{1+t_1} |\nabla u_{-1}|^2(x_1) \quad \text{oraz} \quad \Phi_{(0,0)}(1) = H_1 |\nabla u_{-1}|^2(0).$$

Niestety nie można oszacować dokładnie pierwszej przez drugą (nawet ze stałą multiplikatywną), ale dzięki $|x_1| \leq \delta$ oraz $|t_1| \leq \delta^2$ mamy – po pewnych obliczeniach – $|\rho_{1+t_1}(x - x_1) - \rho_1(x)| \lesssim \delta$ i w rezultacie

$$1 \lesssim \Phi_{(0,0)}(1) + \delta \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{-1}|^2 \, dx \leq \varepsilon_0^2 + \delta R^{2-n} E_0.$$

Przypomnijmy, że stała w powyższej nierówności zależy wyłącznie od n i \mathcal{N} . Jeśli zatem $\varepsilon_0(n, \mathcal{N}) > 0$ i $\delta(n, \mathcal{N}, R^{2-n} E_0) > 0$ są wybrane odpowiednio małe, uzyskujemy sprzeczność. Oznacza to, że zachodzi $e_0 \leq \frac{4}{(\delta-\rho)^2}$ i w konsekwencji $\sup_{P_{\delta/2}} e(u) \leq 16\delta^{-2}$. \square

W interesującym nas przypadku, gdy dziedziną jest torus, powyższy dowód wymaga niewielkiej modyfikacji.

Wniosek 5.7. *Istnieje stała $\varepsilon_0(n, \mathcal{N}) > 0$ taka, że jeśli $u: [-R^2, 0] \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N}$ jest rozwiązaniem (HMF), $0 < R \leq 1$ oraz $\Phi_{(0,0)}(R^2) \leq \varepsilon_0^2$, to*

$$\sup_{P_{\delta R}} R|\nabla u| \leq C$$

dla pewnych dodatnich stałych δ , C zależnych od n, \mathcal{N} oraz $R^{2-n}E(u_{-R^2})$.

Szkic dowodu. Co do zasady, można tu powtórzyć poprzednie rozumowanie, traktując u jako 1-okresowe przekształcenie $u: [-R^2, 0] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{N}$. Początkowa redukcja do przypadku $R = 1$ wymaga skalowania, więc w dalszej części rozumowania należy przyjąć, że u jest przekształceniem R^{-1} -okresowym względem swoich współrzędnych przestrzennych.

Ostatnim elementem wymagającym modyfikacji jest porównanie wielkości $\Phi_{z_1}(1+t_1)$ oraz $\Phi_{(0,0)}(1)$. Ponieważ całka $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{-1}|^2$ jest nieskończona, dotychczasowy argument (ograniczenie różnicy przez $\lesssim \delta$) się tutaj nie stosuje. Jednak jądro ciepła szybko zanika w nieskończoności i dla $R \leq 1$ można sprawdzić, że

$$|\Phi_{z_1}(1+t_1) - \Phi_{(0,0)}(1)| \lesssim \delta \int_{[0, R^{-1}]^n} |\nabla u_{-1}|^2 dx = \delta R^{2-n} E_0.$$

Szczegóły są pozostawione jako Zadanie 5.3. □

Uwaga 5.8. W przypadku, gdy rozwiązanie $u: [-R^2, 0] \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N}$ nie jest określone w chwili $t = 0$, twierdzenie o ε -regularności (czyli Twierdzenie 5.6 i 5.7) pozostaje prawdziwe, przy czym otrzymane nierówności są wówczas prawdziwe na odcinku otwartym (bez $t = 0$).

Aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że nierówność $\Phi_{(0,0)}(R^2) \leq \varepsilon_0^2$ implikuje nierówność $\Phi_{(-\gamma,0)}(R^2 - \gamma) \leq 2\varepsilon_0^2$ dla odpowiednio małych $\gamma > 0$. W ten sposób otrzymujemy oszacowania do czasu $-\gamma$ włącznie, ale oszacowania te są niezależne od γ .

5.5 Charakteryzacja punktów osobliwych

Niech $u: \mathbb{T}^n \times [0, T)$ będzie gładkim rozwiązaniem (HMF) na maksymalnym przedziale określoności, a $z = (T, x)$ punktem w chwili wybuchu. Z formuły monotonicznej (Twierdzenie 4.6) wiemy, że $\Phi_z(s)$ jest niemalejącą funkcją $s > 0$, w szczególności granica

$$\Phi_z(0) := \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_z(s)$$

zawsze istnieje i jest skończoną liczbą nieujemną. Twierdzenie o ε -regularności daje nam następującą implikację:

$$\Phi_z(0) < \varepsilon_0^2 \implies |\nabla u| \in L^\infty(P_r(z)) \text{ dla pewnego } r > 0.$$

Przeciwna implikacja, i to w mocniejszej wersji, jest dużo prostsza:

$$|\nabla u| \in L^\infty(P_r(z)) \text{ dla pewnego } r > 0 \implies \Phi_z(0) = 0.$$

Istotnie, jeśli $|\nabla u| \leq C$ na pewnym cylindrze $P_r(z)$, to

$$\int_{B_r(x)} |\nabla u_{-s}|^2 \rho_s \leq C^2, \quad \int_{B_r^c} |\nabla u_{-s}|^2 \rho_s \lesssim \underbrace{s^{-n/2} e^{-r^2/4s}}_{\rightarrow 0} \underbrace{E(u_{-s})}_{\leq E_0},$$

i w konsekwencji

$$\limsup_{s \rightarrow 0} H_s |\nabla u_{-s}|^2(x) \leq C^2.$$

Oznacza to w szczególności, że $\Phi_z(s) = s H_s |\nabla u_{-s}|^2(x)$ zbiega do zera przy $s \rightarrow 0$.

5.6 Wyższa regularność

Twierdzenie o ε -regularności daje ograniczenie na $|\nabla u|$. Podobnie jak w Twierdzeniu 2.8, oszacowania na wyższe pochodne są wówczas automatyczne:

Lemat 5.9. *Załóżmy, że u jest klasycznym rozwiązaniem (HMF) oraz $|\nabla u| \leq A$ w cylindrze parabolicznym P_1 . Wówczas dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy*

$$\|u\|_{C^k(P_{1/2})} \leq C(n, k, A).$$

Lemat ten jest prawie szczególnym przypadkiem Twierdzenia 2.8. *Prawie*, bo tutaj rozważamy jedynie lokalne oszacowania. Niemniej, użycie funkcji wycinających rozwiązuje ten problem.

Szczególny przypadek (oszacowanie $|\partial_t u|$ w $P_{1/2}$) można wyprowadzić w bardziej bezpośredni sposób w oparciu o Lemat 4.4 (zob. zadanie 5.5).

Szkic dowodu. Rozważmy funkcję wycinającą $\eta \in C^\infty$ spełniającą $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 0$ poza P_1 oraz $\eta \equiv 1$ na $P_{1/2}$. Wówczas wycięta funkcja $v := \eta \cdot u$ spełnia $|\nabla v| \leq C(n, A)$ w całej swojej dziedzinie. Oczywiście v nie spełnia (HMF), ale mało brakuje:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)v &= \eta \cdot (\partial_t - \Delta u) + \partial_t \eta \cdot u - \Delta \eta \cdot u - 2\nabla \eta \cdot \nabla u \\ &= \eta \cdot A_u(\nabla u, \nabla u) + \partial_t \eta \cdot u - \Delta \eta \cdot u - 2\nabla \eta \cdot \nabla u. \end{aligned}$$

Prawa strona jest ograniczona przez stałą zależną od n i A . Ze Stwierdzenia 2.7 wnioskujemy więc ograniczenie na $\|\nabla v\|_{C^{0,1/2}(P_{1/2})}$. Ponieważ $v \equiv u$ w $P_{1/2}$, oznacza to wyższą regularność u .

Rozumowanie to możemy iterować, wycinając coraz mniejsze cylindry, i w kolejnych krokach otrzymując coraz bardziej regularną prawą stronę. Dla ustalonego k daje nam to oszacowanie

$$\|u\|_{C^k(P_{r_k})} \leq C(n, k, A),$$

w którym wielkość cylindra r_k maleje geometrycznie. Prostym argumentem pokrywciowym (w połączeniu ze skalowaniem) wyprowadzamy stąd podobne oszacowanie na $P_{1/2}$. \square

Warto też odnotować, że jeśli rozwiązanie w jakimś obszarze jest regularne w chwili początkowej $t = 0$, to nie traci tej regularności:

Lemat 5.10. *Istnieje stała $\delta(n, \mathcal{N}) > 0$, dla której jeśli u jest gładkim rozwiązaniem (HMF) z Twierdzenia 4.1 oraz $|\nabla u_0| \leq \delta$ na kuli B_2 , to*

$$|\nabla u| \leq 8 \quad \text{na } [0, r_0] \times B_1$$

dla pewnego $r_0(n, \mathcal{N}, E(u_0)) > 0$.

Dowód. Zaadaptujemy dowód Twierdzenia 5.6. Oznaczmy $E_0 := E(u_0)$, $e(u) := \frac{1}{2}|\nabla u|^2$ jak poprzednio, oraz weźmy $r_0 > 0$; wartość $r_0(n, \mathcal{N}, E_0)$ zostanie ustalona później. Rozważmy punkt $q := (r^2, x)$ w badanym obszarze, a więc $0 < r \leq r_0$ i $x \in B_1$. Tak jak poprzednio, wybierzmy $\rho \in [r/2, r]$ maksymalizujące funkcję

$$[r/2, r] \ni \rho \longmapsto (r - \rho)^2 \sup_{P_\rho(q)} e(u),$$

a następnie punkt $z_0 = (t_0, x_0) \in P_\rho(q)$, dla którego przyjmowane jest powyższe supremum:

$$e(u)(z_0) = \sup_{P_\rho} e(u) =: e_0 \cdot r^2.$$

Dalsza część dowodu przebiega jak w Twierdzeniu 5.6, przy czym współczynnik skalowania to e_0 (a nie $e_0 \cdot r^2$). Jeśli $e_0 \leq \frac{4}{(r-\rho)^2}$, to

$$(r/2)^2 \sup_{P_{r/2}(q)} e(u) \leq (r - \rho)^2 \sup_{P_\rho(q)} e(u) \leq 4r^2,$$

i w szczególności $e(u)(q) \leq 16$, co dowodzi tezy.

W przeciwnym przypadku otrzymamy sprzeczność. Tak jak poprzednio, przez przeskalowanie $v(t, x) := u(t_0 + \frac{t}{e_0}, x_0 + \frac{x}{\sqrt{e_0}})$ dochodzimy do ciągu nierówności

$$\begin{aligned} r^2 &= e(v)(0, 0) \\ &\lesssim \int_{P_1} e(v) \, dx \, dt \\ &= e_0^{n/2} \int_{P_{e_0^{-1/2}(z_0)}} e(u) \, dx \, dt \\ &\lesssim \int_{P_{e_0^{-1/2}(z_0)}} e(u)(x) \rho_{t_1-t}(x - x_0) \, dx \, dt \\ &\leq \int_{t_0 - e_0^{-1}}^{t_0} H_{t_1-t} |\nabla u_t|^2(x_0) \, dt \\ &\leq \int_{t_0 - e_0^{-1}}^{t_0} \Phi_{z_1}(t_1 - t) \, dt \\ &\leq \Phi_{z_1}(t_1) \\ &= t_1 \cdot H_{t_1} |\nabla u_0|^2(x_0), \end{aligned}$$

gdzie ponownie $z_1 = (t_1, x_0) = z_0 + (e_0^{-1}, 0)$. Zauważmy, że $t_1 \leq 2r^2$, ostatecznie mamy więc nierówność

$$r^2 \leq B(n, \mathcal{N}) \cdot r^2 \cdot H_{t_1} |\nabla u_0|^2(x_0).$$

Do sprzeczności wystarczy zatem przyjąć $\delta^2 := \frac{1}{4B}$ i r_0 na tyle małe, by $H_{t_1} |\nabla u_0|^2(x_0) \leq 2\delta^2$. Zastosowanie lematu niżej uzasadnia, że takie r_0 istnieje, co kończy dowód. \square

Lemat 5.11. Niech u_0 spełnia $|\nabla u_0| \leq \delta$ w kuli B_2 , oraz niech $E_0 := E(u_0)$. Wówczas istnieje promień $r_0(n, E_0, \delta) > 0$ taki, że

$$H_{r^2} |\nabla u_0|^2(x) \leq 2\delta^2 \quad \text{dla } x \in B_1, \quad 0 < r \leq r_0.$$

Dowód. Intuicyjnie, $H_{r^2} |\nabla u_0|^2(x)$ jest porównywalne ze średnią $f_{B_r(x)} |\nabla u_0|^2$, która wynosi najwyżej δ . Dla ścisłości trzeba jednak uwzględnić ogon jądra ciepła:

$$\begin{aligned} H_{r^2} |\nabla u_0|^2(x) &= \int_{B_2} |\nabla u(y)|^2 \rho_{r^2}(y-x) \, dy + \int_{B_2^c} |\nabla u(y)|^2 \rho_{r^2}(y-x) \, dy \\ &\leq \delta^2 \int_{B_2} \rho_{r^2}(y-x) \, dy + (4\pi r^2)^{-n/2} e^{-1/4r^2} \int_{B_2^c} |\nabla u(y)|^2 \, dy \\ &\leq \delta^2 + (4\pi r^2)^{-n/2} e^{-1/4r^2} \cdot 2E_0. \end{aligned}$$

Wyraz zależny od r zbiega do zera przy $r \rightarrow 0$, więc wystarczy $r \leq r_0(E_0/\delta^2)$, by całość była ograniczona przez $2\delta^2$. \square

5.7 Zadania

Zadanie 5.1. Określmy operator różniczkowy

$$\tau(u) := \partial_{rr} u + \frac{\partial_r u}{r} - \frac{\sin(2u)}{2r^2}, \quad r \in (0, 1).$$

Załóżmy, że $f, h: [0, T] \times [0, 1]$ są dwiema funkcjami ciągłymi, przy czym

$$\partial_t h = \tau(h), \quad \partial_t f < \tau(f) \quad \text{w } (0, T] \times (0, 1),$$

czyli h jest rozwiązaniem, a f podrozwiązaniem. Załóżmy ponadto, że na brzegu parabolicznym zachodzi

$$\begin{aligned} f_0(r) &\leq h_0(r) \quad \text{dla } r \in [0, 1], \quad f_t(1) \leq h_t(1) \quad \text{dla } t \in [0, T], \\ f_t(0) &= 0 = h_t(0) \quad \text{dla } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Wykazać, że wówczas $f \leq h$ w $[0, T] \times [0, 1]$.

Wskazówka. Sprawdzić, że różnica $v := f - h$ spełnia równanie $\partial_t v < \partial_{rr} v + \frac{\partial_r v}{r} + p \cdot v$ ze współczynnikiem $p(t, r)$ ograniczonym z góry.

Zadanie 5.2. [JS10, Zad. 13.4.3] Niech W_t, B_t będą niezależnymi procesami Wienera, i niech τ będzie momentem dojścia W_t do jedynki. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej B_τ :

$$g_{B_\tau}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Zadanie 5.3. (uzupełnienie dowodu Wniosku 5.7) Niech $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją T -periodyczną, gdzie $T \geq 1$. Przekonać się, że jeśli $|x_0| \leq \delta$ i $|t_0| \leq \delta^2$, to

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\rho_1(x) - \rho_{1+t_0}(x-x_0)) \, dx \right| \leq C(n) \delta \int_{[0, T]^n} f(x) \, dx.$$

Zadanie 5.4. Wykazać, że istnieje $\varepsilon_0(n, \mathcal{N}) > 0$ o następującej własności. Jeśli $u: B_4 \rightarrow \mathcal{N}$ jest gładkim przekształceniem harmonicznym oraz $\int_{B_4} |\nabla u|^2 \leq \varepsilon_0$, to $|\nabla u| \leq 1$ w B_1 .

Można przyjąć bez dowodu (albo i z) następujące twierdzenie:

$$\|u\|_{C^{1,1/2}(B_1)} \leq C(n) \|\Delta u\|_{C^0(B_2)}.$$

Wskazówka. Warto naśladować dowód Twierdzenia 5.6: rozważyć punkt $x_0 \in B_2$ maksymalizujący $(2 - |x|)|\nabla u(x)|$. Przyda się też formuła monotoniczna z Zadania 4.3.

Zadanie 5.5. (szczególny przypadek Lematu 5.9) Korzystając z Lematu 4.4, wykazać, że jeśli u jest gładkim rozwiązaniem (HMF) oraz $|\nabla u| \leq A$ na cylindrze P_1 , to $|\partial_t u| \leq C(n, \mathcal{N}, A)$ na mniejszym cylindrze $P_{1/4}$.

Wskazówka. Wyprowadzić wzór typu Bochnera: $(\partial_t - \Delta)|\partial_t u|^2 \leq C(n, \mathcal{N})|\nabla u|^2|\partial_t u|^2$, a następnie skorzystać z parabolicznej nierówności Harnacka.

Rozdział 6

Konstrukcja Struwego (2D)

6.1 Słabe sformułowanie potoku przekształceń harmoniczych

W Twierdzeniu 4.1 pokazaliśmy istnienie gładkie rozwiązania $u: [0, T_{\max}) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ potoku (HMF) na pewnym maksymalnym przedziale czasowym $[0, T_{\max})$. W poprzednim rozdziale widzieliśmy przykłady, że dla odpowiednich wyborów u_0 i \mathcal{M} rozwiązanie nie daje się przedłużyć gładko na cały przedział $[0, \infty)$. Wiemy już, że w takim przypadku (gdy $T_{\max} < \infty$) rozwiązanie wybucha w normie C^1 , tzn. $\|\nabla u_t\|_\infty \rightarrow \infty$ przy $t \rightarrow T_{\max}$. Można jednak zadać dalej idące pytania:

- Jak bardzo złe jest zachowanie u_t przy $t \rightarrow T_{\max}$? Czy $|\nabla u_t(x)|$ wybucha wszędzie, czy tylko w niektórych punktach?
- Czy klasyczne rozwiązanie na $[0, T_{\max})$ daje się przedłużyć do słabego rozwiązania na całym przedziale $[0, \infty)$? Innymi słowy, czy istnieje $u: [0, \infty) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ o regularności niższej niż C^2 , ale spełniające odpowiednie *słabe sformułowanie* równania (HMF)?

Praca Struwego [Str85] daje odpowiedzi na powyższe pytania w szczególnym przypadku dziedziny dwuwymiarowej.

Liczba 2 odgrywa szczególną rolę dla (HMF) ze względu na wykładnik 2 w definicji energii Dirichleta $E(u) = \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2$. Można sprawdzić, że w wymiarze 2 funkcjonal ten jest konforemnie niezmienniczy – oznacza to, że jeśli $\Phi: U \rightarrow V$ jest przekształceniem konforemnym (tzn. dyfeomorfizmem zachowującym kąty) między dwoma zbiorami otwartymi $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz $v = u \circ \Phi$, to

$$\int_U |\nabla v(x)|^2 dx = \int_V |\nabla u(y)|^2 dy.$$

Przykładem przekształcenia konforemnego jest skalowanie $x \mapsto \lambda x$. Przekonaliśmy się już, że brak niezmienniczości w wymiarze $n \geq 3$ prowadził do konstrukcji osobliwości w Twierdzeniu 5.3.

Skalowanie energii Dirichleta w wymiarze 2 jest kluczowe dla gęstości $C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ w $W^{1,2}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ (Lemat B.13) oraz postaci formuły monotonicznej (zob. rozdz. 6.3).

Odpowiedź na pytanie (a) jest pocieszająca: wybuch $|\nabla u_t(x)| \rightarrow \infty$ zachodzi jedynie dla skończonej liczby punktów x , w pozostałych przekształcenie pozostaje gładkie. Aby odpowiedzieć na (b), będziemy musieli wprowadzić pojęcie słabego rozwiązania, ale odpowiedź jest twierdząca – istnieje globalne słabe rozwiązanie.

Jego konstrukcję możemy zacząć od obserwacji, że zgodnie z nierównością energetyczną (Lemat 4.3) można wybrać podciąg $u_t \rightarrow u_{T_{\max}}$ słabo zbieżny w $W^{1,2}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Przyjmując $u_{T_{\max}}$ za nowe przekształcenie początkowe, określamy gładkie rozwiązanie (HMF) na nowym przedziale $[T_{\max}, T'_{\max}]$. Po połączeniu rozwiązań na kolejnych tak skonstruowanych przedziałach otrzymujemy rozwiązanie u na $[0, \infty)$.

Otrzymane u nie jest gładkie na *połączeniach*, ale nadal spełnia słabe sformułowanie. Odnotujmy też, że ta konstrukcja wymusza na nas dopuszczenie przekształceń początkowych w $W^{1,2}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ (a nie tylko w $C^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$).

Żeby ułatwić rozważania, ponownie ograniczymy się do przypadku dziedziny $\mathcal{M} = \mathbb{T}^n$.

Definicja 6.1. Funkcję mierzalną $u: [0, T] \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ nazwiemy słabym rozwiązaniem potoku przekształceń harmonicznymi (HMF), jeśli $u \in C([0, T], L^2(\mathbb{T}^n, \mathcal{N}))$, $u \in L^\infty([0, T], W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N}))$, a ponadto równość

$$\int_{\mathbb{T}^n} u \varphi \, dx \Big|_{t=0}^{t=T} = \int_{[0, T] \times \mathbb{T}^n} u \partial_t \varphi - \nabla u \nabla \varphi + A_u(\nabla u, \nabla u) \varphi \, dx \, dt$$

zachodzi dla dowolnej funkcji testowej $\varphi \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^n, \mathbb{R}^d)$.

Założenie $u \in C([0, T], L^2(\mathbb{T}^n, \mathcal{N}))$ oznacza, że u jest ciągłe jako funkcja $t \mapsto u_t$ z odcinka $[0, T]$ w $L^2(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$. Podobnie warunek $u \in L^\infty([0, T], W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N}))$ mówi tyle, że $u_t \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ dla każdego $t \in [0, T]$, ze wspólnie ograniczoną normą.

Odnotujmy od razu, że każde klasyczne rozwiązanie (HMF) jest również rozwiązaniem słabym. Jest tak dlatego, że

- całkowanie $\partial_t u \varphi$ przez części (względem czasu) daje $-u \partial_t \varphi$, ale z członem brzegowym dla $t = 0$ i $t = T$;
- całkowanie $-\Delta u \varphi$ przez części (względem zmiennej przestrzennej) daje $\nabla u \nabla \varphi$;
- całkowanie $A_u(\nabla u, \nabla u) \varphi$ daje wkład jaki widać.

Inną – być może bardziej naturalną – definicję otrzymalibyśmy, gdybyśmy ograniczyli klasę funkcji testowych do $\varphi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{T}^n, \mathbb{R}^d)$; znika wówczas człon brzegowy. Taką definicję można też przeformułować jako spełnienie (HMF) w sensie dystrybucyjnym. Przy podanej regularności u wszystkie te definicje są jednak równoważne, za to Definicja 6.1 w najprostszym sposobie prowadzi nas do następującej obserwacji:

Lemat 6.2. *Jeśli u jest słabym rozwiązaniem (HMF) na $[0, T_1] \times \mathbb{T}^n$ oraz $[T_1, T_2] \times \mathbb{T}^n$, to jest również słabym rozwiązaniem na $[0, T_2] \times \mathbb{T}^n$.*

Dowód. Zadana funkcję $\varphi \in C^\infty([0, T_2] \times \mathbb{T}^n, \mathbb{R}^d)$ można wykorzystać jako funkcję testową na dwóch krótszych przedziałach, a następnie dodać stronami otrzymane równości. \square

6.2 Globalne rozwiązanie z osobliwościami

Poniższe twierdzenie jest głównym wynikiem pracy Struwego [Str85] (zob. też [LW08, Th. 6.2.1]). Tak jak poprzednio, oryginalne twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej zamkniętej powierzchni \mathcal{M} jako dziedziny, dla uproszczenia szczegółów dowodu ograniczamy się jednak do $\mathcal{M} = \mathbb{T}^2$.

Twierdzenie 6.3. *Załóżmy, że $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ jest zamkniętą podrozmaitością. Wtedy dla każdego przekształcenia początkowego $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^2, \mathcal{N})$ istnieje słabe globalne rozwiązanie $u: [0, \infty) \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ potoku (HMF) (w sensie Definicji 6.1). Ponadto u jest gładkim klasycznym rozwiązaniem (HMF) na dopełnieniu skończonego zbioru punktów osobliwych*

$$\mathcal{S} = \left\{ (t_0, x_0) : \limsup_{s \rightarrow 0} \Phi_{(t_0, x_0)}(s; u) \geq \varepsilon_0^2 \right\},$$

ε_0 to stała
z Twierdzenia 5.6

którego liczność nie przekracza stałej zależnej od \mathcal{N} i $E(u_0)$.

Można pokazać, że uzyskane w ten sposób rozwiązanie jest jednoznaczne. Jest to treść Twierdzenia 6.4.

Twierdzenie Struwego obejmuje również analizę zachowania u w punkcie osobliwym, którą tutaj pomijamy. Otóż dla każdego $(t_0, x_0) \in \mathcal{S}$ istnieje ciąg punktów $x_k \rightarrow x_0$, ciąg momentów $t_k \nearrow t_0$ i ciąg promieni $r_k \searrow 0$, dla których

$$u_k: B_{1/r_k} \rightarrow \mathcal{N}, \quad u_k(x) := u(t_k, x_k + r_k x)$$

zbiega w $W_{\text{loc}}^{2,2}(\mathbb{R}^2)$ do pewnego gładkiego przekształcenia harmonicznego $\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{N}$, zwanego *bąblem*. Przekształcenie to można utożsamić (przez rzut stereograficzny) z gładkim przekształceniem harmonicznym $\omega: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{N}$, i można o nim myśleć, że w chwili t_0 „oddziela się” od u .

Dowód jest dość złożony, więc zostanie podzielony na kroki. Tym bardziej warto odnotować ogólną strategię:

- Przekształcenie u_0 przybliżamy ciągiem przekształceń gładkich $u_0^{(m)}$ i konstruujemy klasyczne rozwiązanie $u^{(m)}: [0, T^{(m)}] \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ ze zmienionym warunkiem początkowym. Wykażemy zbieżność $u^{(m)} \rightarrow u$ do rozwiązania startującego z u_0 .
- Niech T będzie maksymalnym czasem istnienia u . Z nierówności energetycznej wynika, że przy $t \nearrow T$ mamy zbieżność $u_t \rightarrow u_T$ do pewnego $u_T \in W^{1,2}(\mathbb{T}^2, \mathcal{N})$. Wykorzystując u_T jako nowe przekształcenie początkowe, konstruujemy rozwiązanie na przedziale czasowym $[T, T']$. Jeśli tylko liczba osobliwości jest skończona, to opisana procedura w skończenie wielu krokach daje jednoznaczne rozwiązanie na $[0, \infty)$.
- Wykażemy, że każdy punkt osobliwy $(t_0, x_0) \in \mathcal{S}$ wiąże się z koncentracją energii, i w rezultacie ze spadkiem $E(u_t)$ (przy przekraczaniu t_0) o ε_0^2 . W związku z tym osobliwości może być najwyżej $\leq \frac{E(u_0)}{\varepsilon_0^2}$.
- Pokażemy gładkość u w otoczeniu każdego punktu spoza \mathcal{S} .

Dalsze podrozdziały są uporządkowane według powyższego klucza. Następnie przedstawiony jest dowód jednoznaczności rozwiązań (Twierdzenie 6.4).

6.3 Lokalne istnienie gładkiego rozwiązania

Porównanie wielkości monotonicznej $\Phi(s)$ z energią na kuli

Zacznijmy od prostej obserwacji dotyczącej wielkości monotonicznej (4.1) w dwóch wymiarach:

$$\begin{aligned}\Phi_{(t_0, x_0)}(s) &= sH_s |\nabla u_{t_0-s}|^2(x_0) \\ &= s \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_{t_0-s}(y)|^2 (4\pi s)^{-2/2} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{4s}} dy \\ &= (4\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u_{t_0-s}(y)|^2 e^{-\frac{|y-x_0|^2}{4s}} dy\end{aligned}$$

Występujące w definicji potęgi s się zniósł.

W związku z tym na kuli o promieniu \sqrt{s} łatwo oszacować $\Phi_{(t_0, x_0)}(s)$ z dołu:

$$\Phi_{(t_0, x_0)}(s) \geq (4\pi)^{-1} \cdot e^{-1/4} \cdot \int_{B_{\sqrt{s}}(x_0)} |\nabla u_{t_0-s}(y)|^2 dy. \quad (6.1)$$

Z drugiej strony, jeśli ustalimy kulę $B_R(x_0)$, to dla małych s funkcja podcałkowa szybko koncentruje się wewnątrz kuli; ściślej, mamy

$$\Phi_{(t_0, x_0)}(s) \leq e^{-\frac{R^2}{4s}} \cdot E(u_0) + (4\pi)^{-1} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_{t_0-s}(y)|^2 dy. \quad (6.2)$$

Pod większością względów $\Phi(s)$ można więc zastąpić przez zwyczajną energię na kuli: $\int_{B_R(x_0)} |\nabla u|^2$.

Jednostajne oszacowania na ciąg przybliżeń

Rozważmy teraz przekształcenie początkowe $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^2, \mathcal{N})$. Zgodnie z Lematem B.13 istnieje ciąg przekształceń gładkich $u_0^{(m)}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ zbieżnych do u_0 w $W^{1,2}$. Dla każdego z nich Twierdzenie 4.1 daje nam gładkie rozwiązanie $u^{(m)}: [0, T^{(m)}] \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$. Pierwszym problemem w badaniu zbieżności $u^{(m)}$ jest zależność $T^{(m)}$ od m . Gdyby ciąg $T^{(m)}$ zbiegał do zera, nie byłoby mowy o granicy. Skorzystamy więc z ε -regularności (Wniosek 5.7).

Dobierzmy $R > 0$ na tyle małe, by

$$(4\pi)^{-1} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_0(y)|^2 dy \leq \frac{\varepsilon_0^2}{4}$$

dla dowolnej kuli $B_R(x_0) \subseteq \mathbb{T}^2$ o tym promieniu. Jest to możliwe dzięki absolutnej ciągłości całki względem miary. Możemy przyjąć, że norma $\|u_0 - u_0^{(m)}\|_{W^{1,2}}$ jest na tyle mała, że $u_0^{(m)}$ spełnia analogiczny warunek z ograniczeniem $\leq \frac{\varepsilon_0^2}{2}$; ponadto możemy założyć, że $E(u_0^{(m)}) \leq 2E(u_0)$ dla każdego m . Wreszcie ustalmy $s > 0$ na tyle małe, by $2e^{-\frac{R^2}{4s}} E(u_0) \leq \frac{\varepsilon_0^2}{2}$. Wówczas z (6.2) otrzymujemy dla dowolnych $0 < t_0 < s$ i $x_0 \in \mathbb{T}^2$

oszacowanie

$$\begin{aligned}\Phi_{(t_0, x_0)}(t_0; u^{(m)}) &\leq e^{-\frac{R^2}{4t_0}} \cdot E(u_0^{(m)}) + (4\pi)^{-1} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_{t_0-t_0}^{(m)}(y)|^2 dy \\ &\leq 2e^{-\frac{R^2}{4s}} \cdot E(u_0) + (4\pi)^{-1} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u_0^{(m)}(y)|^2 dy \\ &\leq \frac{\varepsilon_0^2}{2} + \frac{\varepsilon_0^2}{2} = \varepsilon_0^2.\end{aligned}$$

Twierdzenie o ε -regularności (Wniosek 5.7) daje nam wówczas ograniczenie $|\nabla u| \leq C$ na małym cylindrze parabolicznym $P_{\delta t_0}(t_0, x_0)$. Stałe δ, C zależą tutaj od $n, \mathcal{N}, E(u_0), t_0$, ale zależność od t_0 sprowadza się do tego, że przy $t_0 \rightarrow 0$ mamy $\delta \rightarrow 0$ i $C \rightarrow \infty$. Ponieważ $x_0 \in \mathbb{T}^2$ było tutaj dowolne, wnioskujemy

$$|\nabla u_t^{(m)}(x)| \leq C(n, \mathcal{N}, E(u_0), t) \quad \text{dla } x \in \mathbb{T}^2, 0 < t < s,$$

przy czym stała C ma prawo wybuchać przy $t \rightarrow 0$. Dowodzi to, że $T^{(m)} > s$ jednostajnie dla wszystkich m . Ścisłe rzecz biorąc, powyższe rozważania należałoby prowadzić dla $t_0 < \min(s, T^{(m)})$, i korzystając z warunku wybuchu $\|\nabla u_t^{(m)}\|_\infty \rightarrow \infty$ przy $t \nearrow T^{(m)}$, a posteriori wykluczyć w ten sposób możliwość $T^{(m)} \leq s$.

Lemat 5.9 mówi, że z oszacowania na $|\nabla u_t^{(m)}|$ możemy wnioskować analogiczne oszacowanie w C^3 (być również wybuchające przy $t \rightarrow 0$). Dzięki twierdzeniu Arzeli-Ascolego i metodzie przekątniowej pozwala nam to wybrać podciąg m_k , dla którego

$$u^{(m_k)} \rightarrow u \quad \text{w } C^2([t, s] \times \mathbb{T}^2) \text{ dla każdego } 0 < t < s.$$

W szczególności przejście do granicy w (HMF) mówi nam, że u również jest klasycznym (w konsekwencji – gładkim) rozwiązaniem na $(0, s) \times \mathbb{T}^2$.

Należy uzasadnić, że otrzymane u ma właściwe dane początkowe. W tym celu przywołajmy nierówność energetyczną (Twierdzenie 4.3):

$$E(u_t^{(m)}) - E(u_0^{(m)}) = - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_t u_s^{(m)}|^2 dx ds,$$

z której w szczególności wynika, że $E(u_t^{(m)}) \leq E(u_0^{(m)})$ dla $t > 0$, i w granicy $E(u_t) \leq E(u_0)$. Wynika też z niej, że wielkość $\|\partial_t u^{(m)}\|_{L^2((0,s) \times \mathbb{T}^2)}^2$ jest wspólnie ograniczona przez $2E(u_0)$. Stosując nierówność Höldera, wnioskujemy stąd ciągłość $u^{(m)}$ względem czasu:

$$\begin{aligned}|u_t^{(m)}(x) - u_0^{(m)}(x)|^2 &= \left| \int_0^t \partial_t u_s^{(m)}(x) ds \right|^2 \\ &\leq t \int_0^t |\partial_t u_s^{(m)}(x)|^2 ds, \\ \|u_t^{(m)} - u_0^{(m)}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 &\leq t \|\partial_t u^{(m)}\|_{L^2((0,s) \times \mathbb{T}^2)}^2 \\ &\leq t \cdot 2E(u_0).\end{aligned}$$

Przejście do granicy $m \rightarrow \infty$ pokazuje, że $u_t \rightarrow u_0$ w $L^2(\mathbb{T}^2)$. Podobnie zresztą uzyskujemy zresztą ciągłość (z wykładnikiem Höldera 1/2) funkcji $[0, s] \ni t \mapsto u_t \in L^2(\mathbb{T}^2)$.

W szczególności uzasadniliśmy, że nierówność energetyczna zachodzi również dla u .

Regularność w obszarach regularności u_0

W ogólności $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^2, \mathcal{N})$ może być funkcją nieciągłą na całej dziedzinie. Dla dowodu gładkości poza zbiorem \mathcal{S} będzie jednak istotne, że jeśli u_0 jest klasy C^1 na jakiejś kuli $B_r(x_0) \subseteq \mathbb{T}^2$, to również uzyskane rozwiązanie u jest regularne na pewnym cylindrze $[0, R^2] \times B_{r/2}(x_0)$.

Przyjmijmy więc, że $|\nabla u_0| \leq A$ na pewnej kuli $B_r(x_0)$. Wówczas dla dostatecznie dużych m mamy podobne oszacowanie: $|\nabla u_0^{(m)}| \leq 2A$ na $B_{r/2}(x_0)$. Dla dostatecznie małego $\lambda(n, \mathcal{N}, r, A) > 0$, przeskalowane przekształcenie $v(x) := u_0^{(m)}(\lambda x)$ spełnia wtedy $|\nabla v| \leq \delta$ na B_2 , gdzie δ jest wartością z Lematu 5.10. Wnioskujemy z niego, że rozwiązanie (HMF) startujące z v ma ograniczoną pochodną przez krótki czas. Przez skalowanie, to samo jest prawdą dla $|\nabla u^{(m)}|$ w pewnym małym otoczeniu $B_{r/4}(x_0)$. Wielkość tego otoczenia oraz konkretne oszacowanie zależą od n, \mathcal{N}, r, A , ale nie zależą od m . W związku z tym również $|\nabla u|$ jest ograniczone na otoczeniu $B_{r/4}(x_0)$.

6.4 Iteracyjna konstrukcja słabego rozwiązania globalnego

W poprzedniej sekcji uzyskaliśmy słabe rozwiązanie $u: [0, s) \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$, które jest gładkim rozwiązaniem na $(0, s) \times \mathbb{T}^2$ (czyli poza chwilą zero). Z tego względu możemy zastosować Twierdzenie 4.1, aby uzyskać istnienie gładkiego rozwiązania na maksymalnym przedziale czasowym $[0, T_0)$ – żeby móc powołać się na to twierdzenie, za przekształcenie początkowe możemy przyjąć np. $u_{s/2}$.

Zacznijmy od obserwacji, że u jest nie tylko klasycznym (gładkim) rozwiązaniem na $(0, T_0) \times \mathbb{T}^2$, ale też słabym rozwiązaniem na $[0, T_0) \times \mathbb{T}^2$. Żeby to uzasadnić, zgodnie z definicją wystarczy przedłużyć u do ciągłej funkcji $t \mapsto u_t \in L^2$ na przedziale domkniętym; ograniczoność energii jest automatyczna dzięki nierówności energetycznej. Wykazaliśmy już ciągłość w $t = 0$, skupmy więc uwagę na $t = T_0$. Dla dowolnego ciągu $t_j \nearrow T_0$ nierówność energetyczna daje nam (dla $k \leq j$)

$$\begin{aligned} \|u_{t_j} - u_{t_k}\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 &\leq (t_j - t_k) \cdot \|\partial_t u\|_{L^2([t_k, t_j] \times \mathbb{T}^2)}^2 \\ &\leq (t_j - t_k) \cdot E(u_0). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że u_{t_j} jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(\mathbb{T}^2)$, i istnieje jednoznacznie wyznaczona granica

$$u_{T_0} := \lim_{t \nearrow T_0} u_t.$$

Zauważmy jeszcze, że $u_{T_0} \in W^{1,2}$ oraz $E(u_{T_0}) \leq E_0$. Dla ciągu t_j jak wyżej wiemy, że $E(u_{t_j}) \leq E_0$, co oznacza, że ciąg ∇u_{t_j} jest ograniczony w L^2 . Możemy więc wybrać podciąg słabo zbieżny do pewnego $V \in L^2$, spełniającego $\|V\|_2 \leq \liminf \| \nabla u_{t_j} \|_2$ (zadanie 6.2). Jednocześnie $u_{t_j} \rightarrow u_{T_0}$ w L^2 , więc z definicji słabej pochodnej wnioskujemy, że V musi być słabym gradientem u_{T_0} . Otrzymaliśmy więc, że

$$u_{T_0} \in W^{1,2}(\mathbb{T}^2, \mathcal{N}), \quad E(u_{T_0}) \leq \liminf_{t \nearrow T_0} E(u_t) \leq E_0.$$

Do konstrukcji V użyliśmy podciągu, ale a posteriori wiemy, że ∇u_{t_j} zbiega słabo do tego samego V niezależnie od wyboru ciągu (zob. zadanie 6.3).

Konstrukcję z poprzedniej sekcji możemy więc powtórzyć, za przekształcenie początkowe przyjmując teraz $u_{T_0} \in W^{1,2}$. W rezultacie otrzymujemy słabe rozwiązanie na kolejnym przedziale czasowym $[T_0, T_1]$. Otrzymane rozwiązania na $[0, T_0]$ i $[T_0, T_1]$ zgadzają się w chwili T_0 , więc z Lematu 6.2 wiemy, że sklejają się do słabego rozwiązania $u: [0, T_1] \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ na dłuższym przedziale. Zauważmy przy tym, że po operacji sklejania nierówność energetyczna pozostaje w mocy.

Pozostaje iterować to rozumowanie do skutku. Jeśli tylko liczba wybuchów jest skończona – a wykażemy to w następnej sekcji – to ciąg T_0, T_1, \dots jest skończony. Oznacza to, że dla któregoś K rozwiązanie startujące z przekształcenia u_{T_K} ma nieskończony czas istnienia, czyli jest gładko określone na $(T_K, \infty) \times \mathbb{T}^2$. Przy użyciu skończenie wielu sklejeń kończy to konstrukcję słabego rozwiązania $u: [0, \infty) \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ przy założeniu wyników następnej sekcji.

6.5 Skończoność zbioru osobliwego

Przypomnijmy definicję zbioru osobliwego:

$$\mathcal{S} = \left\{ (t_0, x_0) : \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{(t_0, x_0)}(s) \geq \varepsilon_0^2 \right\}.$$

Granica $\lim_{s \rightarrow 0} \Phi(s)$ istnieje na mocy Lematu 4.6.

Oznaczmy też *plasterki* $\mathcal{S}_t := \{x : (t, x) \in \mathcal{S}\}$. Jak zauważyliśmy w rozdziale 5.5, punkty regularne – czyli takie, wokół których u jest klasy C^1 – nie należą do \mathcal{S} . Oznacza to, że pierwszym niepustym plasterkiem może być dopiero \mathcal{S}_{T_0} (a następnie plasterki w czasie kolejnych wybuchów).

Przekonajmy się, że \mathcal{S}_{T_0} rzeczywiście jest zbiorem niepustym. Jeśli $x \notin \mathcal{S}_{T_0}$, to z twierdzenia o ε -regularności (Wniosek 5.7) wiemy, że pochodna $|\nabla u|$ jest ograniczona (być może przez dużą stałą) na pewnym (być może małym) cylindrze $P_r(T_0, x)$. Gdyby zbiór \mathcal{S}_{T_0} był pusty, to dzięki zwartości moglibyśmy cały torus \mathbb{T}^2 pokryć skończenie wieloma kulami $P_{r_j}(T_0, x_j)$ (gdzie r_j jest wybrane jak wyżej), co oznaczałoby ograniczoność $|\nabla u|$ na zbiorze $[T_0 - r^2, T_0] \times \mathbb{T}^2$ (tutaj $r := \min r_j$). To jest jednak wykluczone przez charakterystykę wybuchu – wiemy wszak, że $\|\nabla u_t\|_\infty \rightarrow \infty$ przy $t \nearrow T_0$.

Istnieje zatem co najmniej jeden punkt $x \in \mathcal{S}_{T_0}$; dzięki formule monotonicznej warunek ten oznacza $\Phi_{(T_0, x)}(s) \geq \varepsilon_0^2$ dla każdego $s > 0$. Korzystając z porównania Φ z energią na kuli $B_r(x)$ (6.2), otrzymujemy

$$\varepsilon_0^2 \leq \Phi_{(T_0, x)}(s) \leq e^{-\frac{r^2}{4s}} \cdot E_0 + (4\pi)^{-1} \int_{B_r(x)} |\nabla u_{T_0-s}|^2,$$

co po wzięciu granicy $s \rightarrow 0$ oznacza, że

$$\liminf_{t \nearrow T_0} \frac{1}{2} \int_{B_r(x)} |\nabla u_t|^2 \geq \varepsilon_0^2 \quad \text{dla każdego } r > 0.$$

Ustalmy dowolny ciąg $t_k \nearrow T_0$. Jak już zauważyliśmy, na podciągu mamy słabą zbieżność $\nabla u_t \rightarrow \nabla u_{T_0}$ w $L^2(\mathbb{T}^2)$. Taka sama zbieżność ma też miejsce w $L^2(B_r(x)^c)$, co na mocy zadania 6.2 daje nam nierówność

$$\int_{B_r(x)^c} |\nabla u_{T_0}|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{B_r(x)^c} |\nabla u_{t_k}|^2.$$

Dodając stronami z poprzednią nierównością, otrzymujemy

$$2\varepsilon_0^2 + \int_{B_r(x)^c} |\nabla u_{T_0}|^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_{t_k}|^2,$$

i w granicy $r \rightarrow 0$:

$$\varepsilon_0^2 + E(u_{T_0}) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E(u_{t_k}) = \lim_{t \nearrow T_0} E(u_t).$$

Ostatnie przejście jest uzasadnione monotonicznością $E(u_t)$. Okazało się, że $E(u_t)$ jest funkcją nieujemną i nierosnącą, która w chwili każdego wybuchu spada o co najmniej ε_0^2 , co dowodzi, że wybuchów może być najwyżej $\frac{E_0}{\varepsilon_0^2}$.

Wykazaliśmy, że plasterków $\mathcal{S}_{T_0}, \mathcal{S}_{T_1}, \dots$ jest skończenie wiele, dzięki czemu konstrukcja globalnego rozwiązania jest kompletna. Podobnie uzasadnimy skończoność każdego z plasterków. W tym celu wybierzmy skończenie wiele punktów $x_1, \dots, x_K \in \mathcal{S}_{T_0}$. Rozważmy następnie $r > 0$ na tyle małe, by kule $B_r(x_j)$ były rozłączne. Wówczas tak jak poprzednio, połączenie słabej zbieżności w $L^2(\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup B_r(x_j))$ z dolnym ograniczeniem na energię na każdej z kul daje nam:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup B_r(x_j)} |\nabla u_{T_0}|^2 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup B_r(x_j)} |\nabla u_{t_k}|^2, \\ 2\varepsilon_0^2 + \int_{\mathbb{T}^2 \setminus \bigcup B_r(x_j)} |\nabla u_{T_0}|^2 &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_{t_k}|^2, \\ K \cdot \varepsilon_0^2 + E(u_{T_0}) &\leq \lim_{t \nearrow T_0} E(u_t). \end{aligned}$$

Daje to górne ograniczenie na liczbę punktów w \mathcal{S}_{T_0} . A po zsumowaniu ograniczenie na licznosc \mathcal{S} :

$$|\mathcal{S}| \leq \frac{E_0}{\varepsilon_0^2}.$$

6.6 Regularność poza zbiorem osobliwym

Alternatywnie: $u^{(m)}$ są wspólnie ograniczone w każdym C^k , co daje gładką zbieżność do u .

Gładkość u na zbiorze $(0, T_0) \times \mathbb{T}^2$ (oraz na następnych odcinkach pomiędzy wybuchami) jest konsekwencją Lematu 5.9, gdyż na tym zbiorze u jest skonstruowane jako klasyczne rozwiązanie klasy C^2 .

Pozostaje więc wykazać gładkość w otoczeniu punktu $z = (t, x)$, który nie należy do \mathcal{S} , ale t jest chwilą wybuchu. Dla ustalenia uwagi weźmy więc $t = T_0$ i $x \notin \mathcal{S}_{T_0}$. Z definicji \mathcal{S} otrzymujemy, że $\Phi_z(s) \leq \varepsilon_0^2$ dla pewnego $s > 0$, więc z ε -regularności (Wniosek 5.7) wnioskujemy nierówność

$$|\nabla u| \leq A \quad \text{na pewnym cyl. parabolicznym } P_{4r}(z).$$

Słaba zbieżność $\nabla u_t \rightharpoonup \nabla u_{T_0}$ w $L^2(\mathbb{T}^2)$ (na podciągu) w połączeniu z powyższym ograniczeniem na kuli $B_{4r}(x)$ daje oszacowanie (na mocy zadania 6.5)

$$|\nabla u_{T_0}| \leq A \quad \text{na } B_{4r}(x).$$

Zgodnie z własnością opisaną w podrozdziale 6.3, regularność ta jest zachowana przy konstrukcji rozwiązania na przedziale (T_0, T_1) , a mianowicie

$$|\nabla u| \leq B \quad \text{na } (T_0, t_+) \times B_r(x).$$

Konkretne wartości ograniczeń A, B nie mają znaczenia; kluczowe jest tylko, że ograniczenia te mają miejsce również blisko chwili wybuchu T_0 , a więc:

$$|\nabla u| \leq C \quad \text{na } (t_-, t_+) \times B_r(x)$$

dla pewnych $t_- < T_0 < t_+$. Uzasadnimy teraz, że w takim przypadku można zastosować Lemat 5.9 o wyższej regularności. Tak jak w tym lemacie, rozważmy funkcję $v := \eta \cdot u$ (gdzie η jest odpowiednią funkcją wycinającą). Wiemy, że v jest gładkie na $(0, T_0) \times \mathbb{T}^2$ oraz $(T_0, T_1) \times \mathbb{T}^2$. Jednocześnie – dzięki użyciu funkcji wycinającej – $|\nabla v|$ jest ograniczone *wszędzie*, a więc również $(\partial_t - \Delta)v$ jest funkcją ograniczoną (zob. dowód Lematu 5.9). Wzór Duhamela na pewno zachodzi poza chwilą T_0 , a więc:

$$\begin{aligned} v_t - H_{t-t_-} v_{t_-} &= \int_{t_-}^t H_{t-s} ((\partial_t - \Delta)v_s) \, ds && \text{dla } t_- \leq t < T_0, \\ v_t - H_{t-T_0} v_{T_0} &= \int_{T_0}^t H_{t-s} ((\partial_t - \Delta)v_s) \, ds && \text{dla } T_0 < t_0 \leq t \leq t_+. \end{aligned}$$

Skoro jednak $(\partial_t - \Delta)v_s$ jest ograniczone, ciągłość w $L^2(\mathbb{T}^2)$ pozwala nam przejść do granicy i wywnioskować:

$$\begin{aligned} v_{T_0} - H_{T_0-t_-} v_{t_-} &= \int_{t_-}^{T_0} H_{T_0-s} ((\partial_t - \Delta)v_s) \, ds, \\ v_t - H_{t-T_0} v_{T_0} &= \int_{T_0}^t H_{t-s} ((\partial_t - \Delta)v_s) \, ds && \text{dla } T_0 \leq t \leq t_+. \end{aligned}$$

Przykładając operator H_{t-T_0} do obu stron pierwszej równości, uzyskujemy

$$H_{t-T_0} v_{T_0} - H_{t-t_-} v_{t_-} = \int_{t_-}^{T_0} H_{t-s} ((\partial_t - \Delta)v_s) \, ds.$$

Po dodaniu drugiej równości wnioskujemy, że v spełnia wzór Duhamela na całym zbiorze $(t_-, t_+) \times \mathbb{T}^2$. Pozostała część dowodu Lematu 5.9 (opartego na Stwierdzeniu 2.7) jest więc uzasadniona, i wnioskujemy gładkość u na pewnym otoczeniu (T_0, x) .

6.7 Jednoznaczność rozwiązań

Twierdzenie 6.4. *Niech $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^2, \mathcal{N})$. Wówczas istnieje najwyżej jedno słabe rozwiązanie (HMF) $u: [0, \infty) \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ spełniające następujące warunki:*

- energia $E(u_t)$ jest nierosnącą funkcją zmiennej $t \in [0, \infty)$;
- u jest gładkim rozwiązaniem (HMF) na zbiorze $\{(t, x) : t \notin \mathcal{S}\}$, gdzie $\mathcal{S} \subseteq [0, \infty)$ jest pewnym dyskretnym podzbiorem półprostej.

Oszacowania ilościowe

Dla dowodu jednoznaczności potrzebne jest oszacowanie na normy $\|\nabla^2 u_t\|_2$ oraz $\|\nabla u_t\|_2$. Dowód zaczyna się od trzech osobnych oszacowań:

Lemat 6.5. Niech $u: [0, T) \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ będzie słabym rozwiązaniem o energii $E(u_t)$ nierosnącej w czasie, gładkim dla $t > 0$. Wówczas dla $t > 0$ spełnione są oszacowania

$$(a) \quad \|\nabla u_t\|_4^2 \lesssim \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \|\nabla u_t\|_{L^2(B_r(x))} \cdot (\|\nabla^2 u_t\|_2 + C(r)\|\nabla u_t\|_2)$$

$$(b) \quad \|\nabla^2 u_t\|_2 = \|\Delta u_t\|_2$$

$$(c) \quad \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u_s|^2 dx ds \lesssim E_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_s|^4 dx ds$$

gdzie $E_0 := E(u_0)$.

Z tych trzech oszacowań jedynie (c) korzysta z faktu, że u jest rozwiązaniem (HMF); pozostałe dwa są prawdziwe dla dowolnych funkcji $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$. Z kolei oszacowanie (a) jako jedyne korzysta z wymiaru dziedziny. Na torusie \mathbb{T}^n normę L^4 należałoby zastąpić przez $L^{\frac{2n}{n-1}}$. Ta drobna modyfikacja powoduje jednak, że przedstawione tu rozumowanie nie działa w wyższych wymiarach. Co więcej, w wyższych wymiarach rozwiązania wcale nie są jednoznaczne.

Wniosek 6.6. Przy tych samych założeniach,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla^2 u_s|^2 + |\nabla u_s|^4 dx ds < \infty$$

dla $0 < t < T$.

Dowód Wniosku. Oszacowania z punktów (a), (b), (c) układają się w cykl, co oznacza, że ograniczenie jednej z wielkości daje ograniczenie drugiej. Ograniczenia te nie są jednak automatyczne, jeśli stałe w (a), (b), (c) są duże. Kluczową obserwacją jest dla nas, że stała

$$\delta(r) := \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \|\nabla u_t\|_{L^2(B_r(x))}$$

występująca w (a) jest mała dla małych $t > 0$ i $r > 0$. W tym celu skorzystamy z formuły monotonicznej.

A priori formuła monotoniczna zachodzi jedynie dla $t > 0$. Jednak monotoniczność energii wraz ze zbieżnością $u_t \rightarrow u_0$ w L^2 implikuje zbieżność $\nabla u_t \rightarrow \nabla u_0$ w L^2 (zob. zadanie 6.3); formuła monotoniczna jest więc również prawdziwa w granicznym przypadku.

Wielkość $\delta(r)$ porównujemy z Φ tak jak w podrozdziale 6.3:

$$\begin{aligned} \int_{B_r(p)} |\nabla u_t|^2 &\lesssim \Phi_{(t+r^2, p)}(r^2) && \text{dzięki (6.1)} \\ &\leq \Phi_{(t+r^2, p)}(\underbrace{t+r^2}_{s:=}) && \text{z monotoniczności } \Phi \\ &\leq e^{-R^2/4s} \cdot E_0 + (4\pi)^{-1} \int_{B_r(p)} |\nabla u_0|^2 && \text{dzięki (6.2)}. \end{aligned}$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ (do dobrania później). Następnie – zależnie od ε i u_0 – dobierzmy $R > 0$ takie, że $(4\pi)^{-1} \int_{B_r(p)} |\nabla u_0|^2 \leq \varepsilon^2/2$. Wreszcie – zależnie od R i E_0 – dobierzmy $s > 0$ na tyle małe, by $e^{-R^2/4s} \cdot E_0 \leq \varepsilon^2/2$.

Pozwala to ograniczyć wcześniej otrzymaną wielkość przez ε^2 , możemy więc skonkludować:

$$\int_{B_r(p)} |\nabla u_t|^2 \lesssim \varepsilon^2 \quad \text{dla } t \leq s/2, r^2 \leq s/2, p \in \mathbb{T}^2,$$

czyli $\delta(r) \lesssim \varepsilon$ może być dowolnie małe. Pozostaje zastosować oszacowania z (a), (b), (c):

$$\begin{aligned} \|\nabla u_t\|_4^2 &\stackrel{(a)}{\lesssim} \delta(r)(\|\nabla^2 u_t\|_2 + C(\varepsilon)\|\nabla u_t\|_2) \\ &\leq \varepsilon(\|\nabla^2 u_t\|_2 + C(\varepsilon)E_0) \\ &\stackrel{(b)}{=} \varepsilon(\|\nabla^2 u_t\|_2 + C(\varepsilon)E_0), \\ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_s|^4 dx ds &\lesssim \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla^2 u_s|^2 dx ds + C(\varepsilon)t \cdot E_0 \\ &\stackrel{(c)}{\lesssim} \varepsilon^2 \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_s|^4 dx ds + (\varepsilon^2 + C(\varepsilon)t)E_0. \end{aligned}$$

Wystarczy dobrać wartość $\varepsilon > 0$ odpowiednio małą, by po pomnożeniu przez stałą (ukrytą w znaku \lesssim) dała $1/2$. Wówczas otrzymujemy

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_s|^4 dx ds \lesssim E_0,$$

a przez zastosowanie oszacowań (b), (c) również ograniczenie na $\nabla^2 u$.

Rozważania te były prowadzone przy założeniu, że $t > 0$ jest małe. Rozwiązanie jest jednak gładkie dla $t > 0$, więc wkład całki po dowolnym przedziale czasowym $[\delta, T - \delta]$ zawsze jest skończony. \square

Dowód Lematu. (a) Zaczniemy od Twierdzenia Sobolewa o włożeniu (Twierdzenie B.4), które w wymiarze 2 ma postać

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \quad \text{dla } f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Ogólnie: $p^* = \frac{np}{n-p}$
Tutaj: $1^* = \frac{2 \cdot 1}{2-1} = 2$

Przyjmując w miejsce f funkcję g^2 , otrzymujemy nierówność interpolacyjną

$$\|g\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^2 \lesssim \|g\nabla g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\nabla g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Aby móc tę nierówność zastosować do ∇u_t , ustalmy najpierw odpowiedni rozkład jedynki: skończoną rodzinę gładkich funkcji $\lambda_j: \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, 1]$ o nośnikach dyfeomorficznych z kulą \mathbb{B}^2 , których suma wynosi 1. W przypadku torusa łatwo skonstruować taką rodzinę składającą się z zaledwie czterech funkcji (zadanie 6.1). My jednak zażądamy, by każda z funkcji λ_j miała nośnik w jakiejś kuli $B_r(x_j)$ (gdzie małe $r > 0$ jest zadane z góry), przecięcia tych kul były najwyżej 3-krotne (co jest możliwe w wymiarze 2), oraz by $\sum \lambda_j(x)^4 \equiv 1$. Możemy teraz dla każdej z funkcji $\lambda_j \nabla u_t$ wykorzystać nierówność interpolacyjną:

$$\begin{aligned} \|\nabla u_t\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}^4 &= \sum_j \|\lambda_j \nabla u\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}^4 \\ &= \sum_j \|\lambda_j \nabla u\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 \\ &\lesssim \sum_j \|\lambda_j \nabla u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \|\nabla(\lambda_j \nabla u_t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

Każdy z wyrazów $\|\lambda_j \nabla u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ jest ograniczony niezależnie od j jako

$$\|\lambda_j \nabla u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq \int_{B_r(x_j)} |\nabla u_t|^2 \leq \sup_{x \in \mathbb{T}^2} \|\nabla u_t\|_{L^2(B_r(x))}^2.$$

Drugi z wyrazów jest oszacowany przez

$$\|\nabla(\lambda_j \nabla u_t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \lesssim \int_{B_r(x_j)} |\nabla^2 u_t|^2 + \|\nabla \lambda_j\|_\infty \int_{B_r(x_j)} |\nabla u_t|^2$$

Oczywiście norma $\|\nabla \lambda_j\|_\infty$ jest duża dla małych $r > 0$, niemniej jest ograniczona przez stałą $C(r) > 0$. Jako że kule $B_r(x_j)$ mają przecięcia ograniczonej krotności, wynik zsumowania powyższych całek po j jest kontrolowany przez całkę po całym torusie \mathbb{T}^2 . To kończy dowód (a).

(b) W ogólnym przypadku (dla dowolnej powierzchni jako dziedziny) można uzyskać jedynie nierówność, i to z dodatkowym członem po prawej stronie, ale dla torusa poniższy rachunek (oparty na całkowaniu przez części) daje tożsamość:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u|^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{\alpha, \beta} \partial_{\alpha\alpha} u \cdot \partial_{\beta\beta} u \\ &= - \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{\alpha, \beta} \partial_{\beta\alpha\alpha} u \cdot \partial_{\beta} u \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \sum_{\alpha, \beta} \partial_{\beta\alpha} u \cdot \partial_{\alpha\beta} u \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla^2 u|^2. \end{aligned}$$

(c) Jest to nierówność pokrewna nierówności energetycznej, i ma bardzo podobny dowód. Równanie (HMF) mnożymy stronami przez Δu i całkujemy przez części, uzyskując w ten sposób:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u|^2 + \partial_t E(u) &= \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u|^2 - \int_{\mathbb{T}^2} \partial_t u \Delta u \\ &= - \int_{\mathbb{T}^2} A_u(\nabla u, \nabla u) \cdot \Delta u \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u|^2 + C(\mathcal{N}) \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u|^4. \end{aligned}$$

Po przeniesieniu $\frac{1}{2} \int |\Delta u|^2$ na lewą stronę i scałkowaniu po przedziale czasowym $(0, t)$, wnioskujemy nierówność

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u_s|^2 dx ds &\leq (E(u_0) - E(u_t)) + C \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_s|^4 dx ds \\ &\leq E_0 + C \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla u_s|^4 dx ds. \end{aligned}$$

Dla pełnej ścisłości, całkowanie należy przeprowadzić w przedziale (t', t) dla pewnego $t' > 0$. Ze względu na monotoniczność energii mamy jednak $E(u_{t'}) - E(u_t) \leq E(u_{t'}) \leq E_0$, więc ograniczenie na całki $\int_{t'}^t \int_{\mathbb{T}^2} |\Delta u_s|^2 dx ds$ jest wspólne dla wszystkich $t' > 0$. \square

Jednoznaczność lokalnie i globalnie w czasie

Przejdźmy teraz do dowodu jednoznaczności. Na początek pokażemy jednoznaczność rozwiązania przy mocniejszych założeniach:

Lemat 6.7. *Założmy, że $u, v: [0, T) \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ to dwa słabe rozwiązania (HMF) z tym samym warunkiem początkowym $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^2, \mathcal{N})$, spełniające założenia Lematu 6.5. Wówczas $u_t \equiv v_t$ dla wszystkich $t \in [0, T)$.*

Dowód. Oznaczmy $w := u - v$; jest to funkcja gładka dla $t > 0$, a przy $t \rightarrow 0$ mamy $w_t \rightarrow 0$ w $L^2(\mathbb{T}^2)$. Oznaczmy też pomocniczo funkcję $Q := |\nabla u| + |\nabla v|$, o której na mocy Wniosku 6.6 wiemy, że należy do $L^4((0, t_0) \times \mathbb{T}^2)$ (dla dowolnego $0 < t_0 < T$). Korzystając z równania (HMF) spełnianego przez u i v , sprawdzamy bezpośrednio, że

$$|(\partial_t - \Delta)w| \lesssim |w| \cdot Q^2 + |\nabla w| \cdot Q.$$

Domnażając $(\partial_t - \Delta)w$ przez w i całkując po \mathbb{T}^2 , otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |w|^2 \right) + \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla w|^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} w \cdot (\partial_t - \Delta)w \\ &\lesssim \int_{\mathbb{T}^2} |w|^2 Q^2 + \int_{\mathbb{T}^2} |w| |\nabla w| Q. \end{aligned}$$

Przy użyciu nierówności $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{\varepsilon} b^2$ możemy wyrugować $|\nabla w|$ z prawej strony (przez przeniesienie na lewą stronę), co prowadzi do

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |w|^2 \right) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla w|^2 &\lesssim \int_{\mathbb{T}^2} |w|^2 Q^2, \\ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} |w_t|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla w_s|^2 \, dx \, ds &\lesssim \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |w|^2 Q^2 \, dx \, ds \quad (\text{dzięki } w_0 \equiv 0) \\ &\stackrel{\text{(CS)}}{\lesssim} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |w_s|^4 \, dx \, ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} Q^4 \, dx \, ds \right)^{1/2} \\ &\leq \varepsilon(t) \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |w_s|^4 \, dx \, ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ponieważ $Q \in L^4$, całka z $|Q|^4$ jest mała dla małych t ; możemy więc przyjąć, że $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0$. Do oszacowania całki z $|w|^4$ wykorzystamy – tak jak poprzednio – włożenie Sobolewa:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} |w_t|^4 &\lesssim \int_{\mathbb{T}^2} |w_t|^2 \cdot \int_{\mathbb{T}^2} |w_t|^2 + |\nabla w_t|^2 \\ &\leq \sup_{s \in [0, t_0]} \|w_s\|_2^2 \cdot \int_{\mathbb{T}^2} |w_t|^2 + |\nabla w_t|^2 \quad (\text{dla } t \in [0, t_0]), \\ \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |w_s|^4 \, dx \, ds &\lesssim \sup_{s \in [0, t_0]} \|w_s\|_2^2 \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |w_s|^2 + |\nabla w_s|^2 \, dx \, ds \\ &\leq \left(\sup_{s \in [0, t_0]} \|w_s\|_2^2 \right)^2 (1 + t_0) + \left(\int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla w_s|^2 \, dx \, ds \right)^2. \end{aligned}$$

Dla ustalonego małego $t_0 > 0$ uzyskaliśmy więc nierówność postaci

$$\|w_t\|_2^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla w_s|^2 \, dx \, ds \lesssim \varepsilon(t) \left(\sup_{s \in [0, t_0]} \|w_s\|_2^2 + \int_0^t \int_{\mathbb{T}^2} |\nabla w_s|^2 \, dx \, ds \right) \quad \text{dla } t \in [0, t_0].$$

Skoro $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, to dla małych $t > 0$ stała w powyższej nierówności jest mniejsza niż 1. Wnioskujemy wtedy bezpośrednio, że obie strony nierówności są zerowe, czyli $u_t \equiv v_t$ dla $t \in [0, t_0]$. Oba rozwiązania są jednak gładkie dla $t > 0$, pozostaje więc powołać się na jednoznaczność gładkich rozwiązań w Twierdzeniu 4.1. \square

Przejdźcie do globalnej jednoznaczności nie jest teraz trudne. Kluczem tutaj jest jednoznaczność samej iteracyjnej konstrukcji rozwiązania.

Dowód Twierdzenia 6.4. Niech u, v będą dwoma takimi rozwiązaniami. Niech T_0 będzie pierwszym czasem wybuchu jednego z tych rozwiązań. Zgodnie z dowiedzonym lematem, $u_t \equiv v_t$ dla $t < T_0$. Skoro jednak jedno z tych rozwiązań wybucha w T_0 , to drugie też. Z ciągłości w L^2 wnioskujemy, że $u_{T_0} \equiv v_{T_0}$.

Postępując iteracyjnie, otrzymujemy $u_t \equiv v_t$ dla wszystkich $t \geq 0$. \square

6.8 Zadania

Zadanie 6.1. Podać czteroelementową rodzinę funkcji gładkich $\lambda_j: \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, 1]$ ($j = 1, 2, 3, 4$) zadających rozkład jedyńki na torusie, tzn. takich, że $\sum \lambda_j(x) \equiv 1$ dla $x \in \mathbb{T}^2$, a nośnik każdej z funkcji λ_j jest dyfeomorficzny z kulą \mathbb{B}^2 .

Zadanie 6.2. Niech H będzie przestrzenią Hilberta, a $u_k \rightharpoonup u$ ciągiem słabo zbieżnym. Wówczas

- (a) $\|u\| \leq \liminf \|u_k\|$;
- (b) równość w (a) jest równoważna zbieżności normowej $u_k \rightarrow u$ w H .

Zadanie 6.3. Niech $u: [0, \infty) \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ będzie skonstruowanym przez nas rozwiązaniem. Przyjmijmy, że czasy kolejnych wybuchów to $0 < T_0 < T_1 < \dots < T_K$. Wykazać, że

- (a) przy $t \nearrow T_k$, mamy zbieżność $\nabla u_t \rightarrow \nabla u_{T_k}$ słabo w L^2 , ale nie silnie;
- (b) przy $t \searrow T_k$, mamy zbieżność $\nabla u_t \rightarrow \nabla u_{T_k}$ silnie w L^2 (i przy $t \searrow 0$ również).

Zadanie 6.4. Załóżmy, że ciąg $u_k \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zbiega słabo do $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Załóżmy ponadto, że istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla każdego promienia $r > 0$ mamy

$$\int_{B_r} |u_k(x)|^2 \geq \varepsilon^2 \quad \text{dla dostatecznie dużych } k.$$

Wykazać, że wówczas

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx + \varepsilon^2 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |u_k(x)|^2 dx.$$

Wskazówka. Sprawdzić najpierw podobne ograniczenie na całkę po dopełnieniu kuli B_r (dla ustalonego $r > 0$).

Zadanie 6.5. Wykazać, że jeśli $u_k \rightharpoonup u$ słabo w $L^2(X)$ oraz $|u_k| \leq C$ p.w. na pewnym zbiorze mierzalnym $Y \subseteq X$, to również $|u| \leq C$ p.w. na Y .

Rozdział 7

Konstrukcja Chen-Struwego w wyższych wymiarach

7.1 Strategia konstrukcji

Głównym pomysłem stojącym za konstrukcją Chen¹ i Struwego jest rozpatrzenie rodziny równań aproksymujących potok przekształceń harmoniczych, a następnie przejście do granicy z uzyskanym w ten sposób ciągiem rozwiązań przybliżonych. Nasza aproksymacja nawiązuje do klasycznego problemu Ginzburga-Landaua. Mianowicie zrezygnujemy z więzu $u(x) \in \mathcal{N}$, rozpatrując potok przekształceń w \mathbb{R}^d , ale za to z członem niejako *karzącym* za przyjmowanie wartości dalekich od \mathcal{N} . Bardziej precyzyjnie, rozpatrzmy potok gradientowy funkcjonału

$$E_K(u) := \int_{\mathbb{T}^n} \underbrace{\left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + KF(u) \right)}_{e_K(u) :=} dx, \quad (7.1)$$

czyli rozwiązanie równania powiązanego z operatorem Eulera-Lagrange'a tego funkcjonału:

$$(\partial_t - \Delta)u = -K\nabla F(u). \quad (\text{HMF-GL})$$

Aby rozwiązania nie oddalały się od \mathcal{N} , przyjmiemy $F(p) \approx \text{dist}^2(p, \mathcal{N})$, a za $K > 0$ weźmiemy dużą stałą. Konkretną konstrukcję funkcji F możemy oprzeć na rzucie $\pi: \mathcal{N}_\delta \rightarrow \mathcal{N}$ określonego na otoczeniu tubularnym. Ustalimy mianowicie funkcję

$$\begin{aligned} \chi &\in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \chi' \geq 0, \\ \chi(s) &= s \quad \text{dla } s \leq \delta^2/4, \\ \chi(s) &= \delta^2 \quad \text{dla } s \geq \delta^2, \end{aligned}$$

a następnie określimy $F(p) := \chi(\text{dist}^2(p, \mathcal{N}))$. W ten sposób $F(p) = \text{dist}^2(p, \mathcal{N})$ na $\mathcal{N}_{\delta/2}$ oraz $F(p) = \delta^2$ poza \mathcal{N}_δ ; w szczególności (HMF-GL) sprowadza się do klasycznego równania ciepła poza \mathcal{N}_δ .

¹Yunmei Chen, chińska matematyczka

W szczególnym przypadku $\mathcal{N} = \mathbb{S}^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$ funkcję F można zdefiniować jeszcze bardziej jawnym wzorem

$$F(p) := \frac{1}{4}(|p|^2 - 1)^2,$$

co sprowadza (HMF-GL) do postaci

$$(\partial_t - \Delta)u = -K(1 - |u|^2)u.$$

Dla sfery względnie łatwo się przekonać, że rozwiązania powyższego równania zbiegają przy $K \rightarrow \infty$ do rozwiązań (HMF) (zob. podrozdział ??).

Rozwiązanie u równania (HMF-GL) będziemy nazywali K -rozwiązaniem, żeby zaznaczyć wartość parametru K . Ułatwi to badanie ciągu rozwiązań z różnymi wartościami K .

7.2 Rozwiązanie problemu Ginzburga-Landaua

Główną przewagą równania (HMF-GL) nad potokiem (HMF) jest to, że nietrudno jest wykazać istnienie globalnych gładkich rozwiązań.

Twierdzenie 7.1. *Dla dowolnego $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ i dowolnego $K \in \mathbb{N}$ istnieje jednoznaczne rozwiązanie (HMF-GL) $u: [0, \infty) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ gładkie dla $t > 0$ oraz spełniające $u_t \rightarrow u_0$ w $W^{1,2}(\mathbb{T}^n)$ przy $t \rightarrow 0$.*

Metodę punktu stałego zastosujemy tu jak w Twierdzeniu 4.1, ale jeszcze łatwiej.

Książka Lina i Wanga [LW08] i oryginalna praca [CS89] powołują się tu na metodę Galerkiną (choć bez przytoczenia dowodu), ale najłatwiej będzie nam powrócić do metody punktu stałego.

Dowód. Na przestrzeni Banacha

$$X_T := L^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^n; \mathbb{R}^d)$$

wprowadźmy operator

$$Su(t, x) := H_t u_0(x) + \int_0^t H_{t-r} (-K \nabla F(u_r))(x) dr,$$

który – przynajmniej formalnie – zadaje rozwiązanie $v = Su$ problemu pomocniczego

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)v = -K \nabla F(u), \\ v_0 = u_0. \end{cases}$$

Łatwo się przekonać, że $S: X_T \rightarrow X_T$, ponadto dla dwóch $u, v \in X_T$ mamy

$$\|Su - Sv\|_\infty \leq K \|\nabla^2 F\|_\infty \cdot \|u - v\|_\infty,$$

więc S jest kontrakcją dla dostatecznie małego $T > 0$. Odnotujmy przy tym, że wybrana wartość T nie zależy od u_0 .

Z twierdzenia Banacha o punkcie stałym istnieje więc dokładnie jedna funkcja $u \in X_T$, dla której $Su = u$. Odpowiedni wariant Twierdzenia 2.8 mówi nam, że otrzymane u jest gładkie dla $t > 0$, dzięki czemu spełnia (HMF-GL) również w klasycznym sensie. Z równości $Su = u$ jest jasne, że $\|u_t - H_t u_0\|_\infty \rightarrow 0$ przy $t \rightarrow 0$, więc w szczególności $u_t \rightarrow u_0$ w $L^2(\mathbb{T}^n)$. To wystarczy, by konstrukcją na odcinku $[0, T]$ iterować i otrzymać jednoznaczne rozwiązanie na całym $[0, \infty) \times \mathbb{T}^n$, gładkie dla $t > 0$.

Pozostaje uzasadnić ciągłość w $t \mapsto u_t \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n)$. W tym celu wystarczy wziąć pochodną obu stron równości $u = Su$, a następnie zastosować Stwierdzenie 2.3 i zadanie 2.7:

$$\begin{aligned} |\nabla u_t(x) - H_t \nabla u_0(x)| &= |\nabla(u_t - H_t u_0)(x)| \\ &\leq \int_0^t |\nabla H_{t-r}(-K \nabla F(u_r))(x)| \, dr \\ &\lesssim \int_0^t t^{-1/2} \|\nabla(-K \nabla F(u_r))\|_\infty \, dr \\ &\lesssim K \|\nabla F\|_\infty \cdot t^{1/2}. \end{aligned}$$

Okazuje się więc, że $\|\nabla u_t - H_t \nabla u_0\|_\infty \rightarrow 0$, co w połączeniu z $\|H_t \nabla u_0 - \nabla u_0\|_2 \rightarrow 0$ daje tezę. \square

7.3 Własności rozwiązań

Własności potoku przekształceń harmoniczych (HMF) – takie jak skalowanie paraboliczne, nierówność energetyczna, formuła monotoniczna, wzór Bochnera, ε -regularność – przenoszą się również na rozwiązania (HMF-GL). Oczywiście konieczna jest modyfikacja – rolę gęstości energii $e(u)$ odgrywa tu $e_K(u) = \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + KF(u)$, a rolę energii Dirichleta $E(u)$ funkcjonal $E_K(u) = \int e_K(u) \, dx$ (jak w (7.1)).

Potrzebna jest jeszcze druga modyfikacja, wymuszona przez zachowanie równania (HMF-GL) przy skalowaniu parabolicznym. Przypomnijmy, że przez K -rozwiązanie rozumiemy rozwiązanie (HMF-GL) z parametrem K .

Lemat 7.2 (skalowanie paraboliczne). *Jeśli $u^{(\lambda)}(t, x) = u(\lambda^2 t, \lambda x)$, a u jest K -rozwiązaniem, to $u^{(\lambda)}$ jest $\lambda^2 K$ -rozwiązaniem. Ponadto $e_{\lambda^2 K}(u^{(\lambda)})(t, x) = \lambda^2 e_K(u)(\lambda^2 t, \lambda x)$.* *Analog: Lemat 4.5*

Dowód tego i następnych lematów pomijamy, gdyż dowody dla potoku (HMF) łatwo się przenoszą na nasz przypadek.

Lemat 7.3 (nierówność energetyczna [LW08, Lem. 7.6.1]). *Jeśli u jest K -rozwiązaniem, to* *Analog: Lemat 4.3*

$$E_K(u_t) - E_K(u_0) = - \int_0^t \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_t u_s|^2 \, dx \, ds,$$

w szczególności $E_K(u(t))$ jest funkcją nierosnącą.

W tym miejscu warto odnotować, że jeśli $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$, to $E_K(u_0) = E(u_0)$ jest niezależne od K .

Analog: **Lemat 7.4.** *Jeśli u jest K -rozwiązaniem, to*
 Lemat 4.4

$$\int_{P_r} |\partial_t u|^2 dx dt \lesssim r^{-2} \int_{P_{2r}} e_K(u) dx dt.$$

Analog: **Lemat 7.5** (formuła monotoniczna [LW08, Lem. 7.6.2]). *Jeśli u jest K -rozwiązaniem,*
 Lemat 4.6 to

$$\Phi_{(t_0, x_0)}^K(s; u) := sH_s(e_K(u_{t_0-s}))(x_0)$$

jest niemalejącą funkcją argumentu $s > 0$.

Pomocna jest ponadto niezmienniczość Φ ze względu na skalowanie:

Analog:
 Lemat 4.5

$$\Phi_{(0,0)}^K(\lambda^2 s; u) = \Phi_{(0,0)}^{\lambda^2 K}(s; u^{(\lambda)}).$$

Analog: **Lemat 7.6** (wzór Bochnera [CS89, eq. (2.13)]). *Jeśli u jest K -rozwiązaniem, to*
 Lemat 4.7

$$(\partial_t - \Delta)e_K \lesssim e_K^2.$$

Ponadto na zbiorze, na którym $u_t(x) \in \mathcal{N}_{\delta/2}$, oszacowanie jest silniejsze:

$$(\partial_t - \Delta)e_K + K^2 F(u) \lesssim e_K^2.$$

Co ciekawe, w [LW08] silniejsze sformułowanie wzoru Bochnera jest wykorzystywane, choć nie jest ani dowiedzione, ani nawet wspomniane.

Książka Lina i Wang'a zawiera jedynie słabsze sformułowanie wzoru Bochnera [LW08, Lem. 7.6.3], a w oryginalnym artykule Chen i Struwego użyte są inne oznaczenia, więc przytoczymy tutaj pełny dowód.

Dowód. Jak w klasycznym wzorze Bochnera, obliczamy bezpośrednio:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) &= - \sum_{\alpha, \beta} |\partial_{\alpha\beta} u|^2 + \sum_{\alpha} \langle \partial_{\alpha} u, (\partial_t - \Delta) \partial_{\alpha} u \rangle \\ &= - \sum_{\alpha, \beta} |\partial_{\alpha\beta} u|^2 - K \sum_{\alpha} \langle \partial_{\alpha} u, \partial_{\alpha} (\nabla F(u)) \rangle \\ &= - |\nabla^2 u|^2 - K \nabla^2 F(u) (\nabla u, \nabla u), \end{aligned}$$

gdzie $Q(\nabla u, \nabla u)$ jest skrótowym zapisem $\sum_{\alpha} Q(\partial_{\alpha} u, \partial_{\alpha} u)$. Wyznaczamy też drugą część wzoru:

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) F(u) &= \nabla F(u) \cdot (\partial_t - \Delta) u - \nabla^2 F(u) (\nabla u, \nabla u) \\ &= -K |\nabla F(u)|^2 - \nabla^2 F(u) (\nabla u, \nabla u), \\ (\partial_t - \Delta) e_K &= (\partial_t - \Delta) \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + K F(u) \right) \\ &= - |\nabla^2 u|^2 - K^2 |\nabla F(u)|^2 - 2K \nabla^2 F(u) (\nabla u, \nabla u) \end{aligned}$$

Dla większej czytelności rozumowania rozpatrzmy osobno trzy przypadki:

I Gdy $u_t(x) \notin \mathcal{N}_{\delta}$, na pewnym otoczeniu mamy $\nabla F(u) \equiv 0$ i $\nabla^2 F(u) \equiv 0$ (gdyż F jest stałe poza \mathcal{N}_{δ}) i w rezultacie $(\partial_t - \Delta)e_K \leq 0$.

II Gdy $u_t(x) \in \mathcal{N}_{\delta/2}$, na pewnym otoczeniu mamy $F(u) = \text{dist}^2(u, \mathcal{N})$. Wówczas $|\nabla F(u)| = 2 \text{dist}(u, \mathcal{N}) = 2F(u)^{1/2}$, a na mocy zadania 7.2 również

$$\begin{aligned} -2 \nabla^2 F(u) (\nabla u, \nabla u) &\lesssim F(u)^{1/2} |\nabla u|^2, \\ -2K \nabla^2 F(u) (\nabla u, \nabla u) &\leq K^2 F(u) + C |\nabla u|^4. \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu pozostałych ujemnych wyrazów otrzymujemy więc

$$(\partial_t - \Delta)e_K + K^2 F(u) \leq (\partial_t - \Delta)e_K + \frac{1}{2}K^2 |\nabla F(u)|^2 \lesssim |\nabla u|^4 \lesssim e_K^2.$$

III Gdy $\text{dist}(u_t(x), \mathcal{N})$ leży pomiędzy $\delta/2$ i δ , hesjan $\nabla^2 F$ szacujemy przez stałą. Ponieważ $F(u) \geq \delta^2/4$ na tym zbiorze, otrzymujemy po prostu

$$(\partial_t - \Delta)e_K \leq -2K \nabla^2 F(u)(\nabla u, \nabla u) \lesssim K \cdot |\nabla u|^2 \lesssim KF(u) \cdot |\nabla u|^2 \leq e_K^2.$$

□

Lemat 7.7 (twierdzenie o ε -regularności [LW08, Lem. 7.6.4]). *Istnieje stała $\varepsilon_0(n, \mathcal{N}) > 0$ analog: taka, że jeśli $u: [-R^2, 0] \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ jest K -rozwiązaniem, $0 < R \leq 1$ oraz $\Phi_{(0,0)}^K(R^2) \leq \varepsilon_0^2$, Wniosek 5.7 to*

$$\sup_{P_{\delta R}} R^2 e_K(u) \leq C$$

dla pewnych dodatnich stałych δ, C zależnych od n, \mathcal{N} oraz $R^{2-n} E_K(u_{-R^2})$.

Najistotniejszą częścią powyższego twierdzenia o ε -regularności jest, że stała ε_0 nie zależy od parametru K .

Może się to wydawać zaskakujące, ale w istocie dowód przebiega identycznie jak w przypadku rozwiązań (HMF). Należy jedynie zamienić każde wystąpienie $e(u)$ (jak też $|\nabla u|$) na $e_K(u)$ oraz zwrócić uwagę, że skalowanie paraboliczne wpływa na parametr K w równaniu (HMF-GL). Ponieważ parametr ten nie ma wpływu na formułę monotoniczną oraz wzór Bochnera, reszta rozumowania pozostaje niezmienna.

7.4 Zachowanie w otoczeniu punktu regularnego

Twierdzenie o ε -regularności daje – przy założeniu $\Phi^K \leq \varepsilon_0^2$ – ograniczenie na gęstość energii $e_K(u)$, a więc w szczególności na pochodną przestrzenną $|\nabla u|$. W odróżnieniu od potoku (HMF) nie jest jednak oczywiste, że wynika stąd ograniczenie na wyższe pochodne u przez stałą niezależną od parametru K . W tej sekcji zbadamy więc, jakie własności rzeczywiście da się wywnioskować, zwłaszcza dla dużych K . Ze względu na skalowanie wystarczy przyjąć promień $R = 1$ i stałą $C = 1$.

Lemat 7.8. *Załóżmy, że u jest K -rozwiązaniem oraz $e_K(u) \leq 1$ na cylindrze jednostkowym P_1 . Wówczas*

(a) $\|\partial_t u\|_{L^2(P_{1/2})} \leq C(n)$;

(b) u spełnia warunek Lipschitza względem metryki parabolicznej:

$$|u(z_1) - u(z_2)| \leq C(n) \cdot d_P(z_1, z_2) \quad \text{dla } z_1, z_2 \in P_{1/4};$$

(c) jeśli K jest odpowiednio duże, to $u(z) \in \mathcal{N}_{\delta/2}$ oraz $\text{dist}^2(u(z), \mathcal{N}) \leq 1/K$ dla $z \in P_1$;

(d) $\|K \nabla F(u)\|_{L^2(P_{1/4})}, \|\nabla^2 u\|_{L^2(P_{1/4})} \leq C(n)$ dla dostatecznie dużych K .

Dowód. Punkt (a) jest bezpośrednim wnioskiem z Lematu 7.4 – norma $\|\partial_t u\|_{L^2(P_{1/2})}$ szacuje się przez $\|e_K(u)\|_{L^2(P_1)}$.

Podobnie uzasadniamy punkt (b). Ustalmy $z_1 = (t_1, x_1)$, $z_2 = (t_2, x_2)$ w $P_{1/2}$ i niech

$$r := \max(\sqrt{|t_1 - t_2|}, |x_1 - x_2|/2), \quad x_0 := \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad t_0 := \max(t_1, t_2).$$

Z nierówności trójkąta mamy

$$|u(z_1) - u(z_2)| \leq |u_{t_1}(x_1) - (u_{t_1})_{B_r(x_0)}| + |u_{t_2}(x_2) - (u_{t_2})_{B_r(x_0)}| + |(u_{t_1})_{B_r(x_0)} - (u_{t_2})_{B_r(x_0)}|,$$

gdzie przez f_B oznaczyliśmy średnią z f po B . Pierwsze dwa wyrazy szacujemy bezpośrednio z nierówności $e_K(u) \leq 1$, otrzymując ograniczenie rzędu r . Do ograniczenia drugiego wyrazu ponownie używamy Lematu 7.4:

$$\begin{aligned} |(u_{t_1})_{B_r(x_0)} - (u_{t_2})_{B_r(x_0)}| &\leq \int_{B_r(x_0)} |u_{t_1} - u_{t_2}| \, dx \\ &\leq \int_{B_r(x_0)} \int_{[t_1, t_2]} |\partial_t u| \, dt \, dx \\ &\lesssim r^2 \int_{P_r(t_0, x_0)} |\partial_t u| \, dx \, dt \\ &\leq r^2 \left(\int_{P_r(t_0, x_0)} |\partial_t u|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2} \\ &\lesssim r^2 \left(r^{-2} \int_{P_{2r}(t_0, x_0)} e_K(u) \, dx \, dt \right)^{1/2} \\ &\leq r. \end{aligned}$$

Punkt (c) sprowadza się do obserwacji, że nierówność $e_K(u) \leq 1$ oznacza w szczególności $K \cdot F(u) \leq 1$, a więc $F(u) \leq 1/K$. Dla dostatecznie dużych K oznacza to, że $F(u) < \delta^2/4$, a więc $F(u) = \text{dist}^2(u, \mathcal{N})$.

Na potrzeby punktu (d) kluczową obserwacją jest, że możemy skorzystać z mocniejszej wersji wzoru Bochnera:

$$(\partial_t - \Delta)e_K + K^2 F(u) \leq C \cdot e_K^2 \leq C.$$

Reszta dowodu przebiega podobnie jak w Lemacie 4.4. Wykorzystamy funkcję testową

$$\varphi \in C_c^\infty((-1, 0] \times B_1), \quad \varphi \equiv 1 \text{ na } [-1/4, 0] \times B_{1/2}, \quad \varphi \geq 0.$$

Po pomnożeniu obu stron nierówności przez φ i scałkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{P_{1/2}} K^2 F(u) &\leq \int_{P_1} K^2 F(u) \cdot \varphi \\ &\leq \int_{P_1} C \varphi - \int_{P_1} \partial_t e_K \cdot \varphi + \int_{P_1} \Delta e_K \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Każda z całek po prawej stronie jest ograniczona przez stałą; żeby to zauważyć, należy drugą z nich scałkować przez części po czasie (uwzględniając wyraz brzegowy), a trzecią dwukrotnie po przestrzeni. W ten sposób ograniczyliśmy całkę z $K^2 F(u)$. Jednak w

przypadku $\text{dist}(u, \mathcal{N}) < \delta/2$ mamy $|\nabla F(u)|^2 = 4F(u)$, więc otrzymane oszacowanie przekłada się na ograniczenie normy $K\nabla F(u)$ w $L^2(P_{1/2})$.

Pozostaje zauważyć, że w równaniu $\partial_t u - \Delta u = -K\nabla F(u)$ ograniczenie na $\partial_t u$ i $K\nabla F(u)$ w normie $L^2(P_{1/2})$ daje podobne ograniczenie na Δu . Rachunek z Lematu 6.5b – po uwzględnieniu funkcji wycinającej – pokazuje, że implikuje to ograniczenie na $\nabla^2 u$ na trochę mniejszym zbiorze $(-1/4, 0) \times B_{1/4}$. \square

Pożyteczny będzie również poniższy lemat, który stwierdza, że oszacowanie $e_K(u) \leq 1$ na P_1 implikuje nieco gorsze oszacowanie na pewnym małym cylindrze $[0, r_0^2] \times B_{r_0}$. Oznacza to, że własności opisane w Lemacie 7.8 zachodzą również na $[0, r_0^2] \times B_{r_0}$, z nieco gorszymi stałymi.

Lemat 7.9. *Jeśli u jest K -rozwiązaniem oraz $e_K(u) \leq 1$ na cylindrze jednostkowym P_1 (wychodzącym w przeszłość), to $e_K(u) \leq C$ na pewnym cylindrze $[0, r_0^2] \times B_{r_0}$ (wychodzącym w przyszłość), dla pewnych stałych $C(n, \mathcal{N}) > 0$ i $r_0(n, \mathcal{N}, E_K(u_0)) > 0$.*

Dowód jest nieznaczną modyfikacją rozumowania z Lematu 5.10, więc go tutaj pominiemy. Aby powołać się na ten sam argument, należy najpierw zastosować skalowanie jak w końcówce rozdziału 6.3.

7.5 Przejście do granicy w punktach regularnych

Ustalmy przekształcenie początkowe $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ i dla każdego $K \in \mathbb{N}$ rozważmy K -rozwiązanie $u_K : [0, \infty) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ równania (HMF-GL) skonstruowane w Twierdzeniu 7.1. Opiszemy teraz przejście do granicy $K \rightarrow \infty$ wokół punktów regularnych.

W analogii do przypadku dwuwymiarowego wprowadzamy zbiór koncentracji energii

$$\mathcal{S} := \left\{ z \in (0, \infty) \times \mathbb{T}^n : \forall_{s>0} \liminf_{K \rightarrow \infty} \Phi_z^K(s; u_K) \geq \varepsilon_0^2 \right\},$$

przy czym tym razem koncentracja ma miejsce w przejściu granicznym $u_K \rightarrow u$, a nie w czasie $t \nearrow T_0$. *Punktem regularnym* nazwiemy każdy punkt poza \mathcal{S} .

Ustalmy $z_0 \notin \mathcal{S}$. Istnieje wówczas $s > 0$ takie, że

$$\liminf_{K \rightarrow \infty} \Phi_{z_0}^K(s; u_K) < \varepsilon_0^2.$$

Możemy więc ustalić podciąg (dla prostoty zapisu nadal oznaczany przez K), na którym zachodzi nierówność $\Phi_{z_0}^K(s; u_K) \leq \varepsilon_0^2$. Zgodnie z twierdzeniem o ε -regularności oznacza to, że

$$e_K(u_K) \leq C \text{ na } P_r(z_0) \quad \text{dla wszystkich } K.$$

Wielkości $C, r > 0$ zależą od n, \mathcal{N} i s , ale nie zależą do $r > 0$. Przy użyciu odpowiedniego przeskalowania możemy powołać się na Lemat 7.8, oczywiście z odpowiednio gorszymi stałymi. Oznaczając $Q := P_{r/4}(z_0)$, możemy podsumować, że wielkości

$$\|u_K\|_{\text{Lip}_P(Q)}, \quad \|\partial_t u_K\|_{L^2(Q)}, \quad \|\nabla^2 u_K\|_{L^2(Q)}, \quad \|K\nabla F(u_K)\|_{L^2(Q)}$$

są wspólnie ograniczone dla wszystkich K . Na mocy twierdzeń Arzeli-Ascolego i Banacha-Alaoglu pozwala to wybrać podciąg, na którym $u_K \rightarrow u$ jednostajnie, a ponadto

$\nabla u_K \rightarrow \nabla u$ słabo-* w L^∞ oraz $\nabla^2 u_K, \partial_t u_K$ zbiegają słabo w L^2 do swoich odpowiedników $\nabla^2 u, \partial_t u$. Z warunku $\text{dist}^2(u_K, \mathcal{N}) \lesssim 1/K$ wiemy ponadto, że $u(z) \in \mathcal{N}$ dla p.w. $z \in Q$.

O ciągu $-K\nabla F(u_K)$ możemy powiedzieć jedynie, że zbiega słabo do pewnego pola $V \in L^2(P_{r/4})$, które spełnia w słabym sensie równanie

$$(\partial_t - \Delta)u = V.$$

Uzasadnimy, że $V(z)$ jest prostopadłe do \mathcal{N} w $u(z)$. W tym celu przypomnijmy, że $F(u_K) = \text{dist}^2(u_K, \mathcal{N})$ (dla dużych K) i w konsekwencji

$$\nabla F(u_K(z)) = 2 \text{dist}(u_K(z), \mathcal{N}) \mathbf{n}(z)$$

dla pewnego wektora jednostkowego $\mathbf{n}(z) \in (T_{\pi(u_K(z))} \mathcal{N})^\perp$. Rzut tego wektora na przestrzeń styczną $T_{u(z)} \mathcal{N}$ – do czego użyjemy symbolu \top – jest więc prawie zerowy, a błąd można oszacować w terminach odległości tych dwóch punktów na \mathcal{N} :

$$\frac{|\nabla^\top F(u_K(z))|}{|\nabla F(u_K(z))|} \lesssim |\pi(u_K(z)) - u(z)| \leq \|u_K - u\|_\infty.$$

Stąd też

$$\|K\nabla^\top F(u_K(z))\|_{L^2} \lesssim \|u_K - u\|_\infty \cdot \|K\nabla F(u_K(z))\|_{L^2} \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0.$$

Jeśli więc równanie $(\partial_t - \Delta)u_K = -K\nabla F(u_K)$ obłożymy punktowo operatorem rzutowania na $T_{u(z)} \mathcal{N}$, to w granicy $K \rightarrow \infty$ otrzymamy

$$(\partial_t - \Delta)^\top u = 0.$$

Jest to równoważna forma potoku (HMF). Istotnie, na mocy Lematu B.12 mamy $\partial_t^\top u = \partial_t u$ p.w., a ponadto rachunek prowadzący do równości

$$\Delta u = \Delta^\top u - A_u(\nabla u, \nabla u)$$

pozostaje w mocy dla przekształcenia $u \in W^{2,2}(Q, \mathcal{N})$ (zob. Lemat B.7 i zadanie 7.3). Wywnioskowaliśmy w ten sposób, że równanie (HMF) $(\partial_t - \Delta)u = A_u(\nabla u, \nabla u)$ zachodzi w słabym sensie w Q .

Pozostaje uzasadnić, dlaczego u jest również gładkim rozwiązaniem klasycznym. Ponieważ gradient ∇u jest ograniczony, wystarczy uzasadnić, że u jest zadane wzorem Duhamela. Gdyby wykazane tutaj własności były prawdziwe wszędzie (nie tylko na Q), wystarczyłoby porównać u z $v_t := H_t u_0 + \int_0^t H_{t-r}(A_{u_r}(\nabla u_r, \nabla u_r)) dr$. Ich różnica $u - v$ jest ciągła, ma zerowe dane początkowe i spełnia równanie ciepła $(\partial_t - \Delta)(u - v) = 0$ w słabym sensie. Jednoznaczność słabych rozwiązań równania ciepła (zadanie ??) kończy wówczas dowód. Żeby rozumowanie to móc przeprowadzić lokalnie, zamiast u rozważamy funkcję ηu domnożoną przez odpowiednią funkcję wycinającą.

Przypomnijmy, że całe to rozumowanie przeprowadziliśmy na pewnym małym cylindrze parabolicznym $Q = P_{r/4}(z_0)$, gdzie z_0 jest ustalonym punktem spoza \mathcal{S} . Można jednak w miejsce Q przyjąć pewne (jeszcze mniejsze) otoczenie punktu z_0 . Istotnie, zgodnie z Lematem 7.9 mamy nierówność $e_K(u) \leq C$ na pewnym otoczeniu z_0 , co pozwala powtórzyć całą resztę rozumowania.

7.6 Oszacowanie zbioru osobliwego i jego konsekwencje

Przypomnijmy, że zbiór osobliwy \mathcal{S} jest zdefiniowany następująco:

$$\mathcal{S} := \left\{ z \in (0, \infty) \times \mathbb{T}^n : \forall_{s>0} \liminf_{K \rightarrow \infty} \Phi_z^K(s; u_K) \geq \varepsilon_0^2 \right\}.$$

Lemat 7.10. *Zbiór osobliwy \mathcal{S} jest domknięty oraz lokalnie skończoną n -wymiarową paraboliczną miarę Hausdorffa, to znaczy $\mathcal{H}^n(\mathcal{S} \cap L) < \infty$ dla dowolnego zwartego $L \subseteq (0, \infty) \times \mathbb{T}^n$.*

Przypomnijmy, że miara Hausdorffa \mathcal{H}^n jest definiowana jako granica miar zewnętrznych

$$\mathcal{H}_\delta^n(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^N r_i^n : A \subseteq \bigcup_{i=1}^N Q_{r_i}(z_i), 0 < r_i < \delta \right\}.$$

W miejsce kul euklidesowych przyjmujemy tutaj kule paraboliczne $Q_r(z)$ wyznaczone przez metrykę paraboliczną

$$d_P((t', x'), (t, x)) = \max(|t' - t|^{1/2}, |x' - x|),$$

a więc $Q_r(t, x) = \{(t', x') : |t' - t| \leq r^2, |x' - x| \leq r\}$.

Zamiast max można wziąć sumę albo jeszcze coś innego. Oczywiście wpływa to na kształt kuli, ale otrzymane metryki są równoważne.

Warto się nad paraboliczną metryką d_P pochylić, np. sprawdzić, że istotnie jest metryką. Zauważmy też, że topologia indukowana przez d_P jest tożsama z euklidesową.

Jednocześnie te dwie metryki nie są równoważne. Okazuje się, że paraboliczny wymiar Hausdorffa dziedziny $(0, \infty) \times \mathbb{T}^n$ to $n + 2$, a nie $n + 1$. Jest tak dlatego, że wymiar samej prostej czasowej $(0, \infty) \times \{p\}$ wynosi 2 (zadanie ??).

Dowód. Domkniętość najłatwiej pokazać poprzez otwartość dopełnienia. Weźmy punkt $z = (t, x) \notin \mathcal{S}$ i dobierzmy $s > 0$, dla którego

$$\gamma := \liminf_{K \rightarrow \infty} \Phi_z^K(s; u_K) < \varepsilon_0^2.$$

Wyberzmy następnie podciąg, na którym granica dolna jest realizowana (dla uproszczenia nadal oznaczany przez K). Dla $z' = (t', x')$ bliskiego z dobierzmy $s' > 0$ tak, by $t' - x' = t - x$. Wyjątkowo używając oznaczenia ρ dla jądra ciepła na torusie, mamy

$$|\rho_{s'}(x', y) - \rho_s(x, y)| \leq \omega(z') \quad \text{dla } y \in \mathbb{T}^n,$$

gdzie $\omega(z') > 0$ jest wielkością zbieżną do zera przy $z' \rightarrow 0$. Porównując wielkości monotoniczne, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left| \Phi_{z'}^K(s'; u_K) - \frac{s'}{s} \Phi_z^K(s; u_K) \right| &= s' \left(H_{s'} |\nabla u_{t'-s'}|^2(x') - H_s |\nabla u_{t-s}|^2(x) \right) \\ &\leq s' \int_{\mathbb{T}^n} |\nabla u_{t-s}(y)|^2 |\rho_{s'}(x', y) - \rho_s(x, y)| \, dy \\ &\leq s' \cdot 2E_K(u_{t-s}) \cdot \omega(z') \\ &\leq s' \cdot 2E(u_0) \cdot \omega(z'). \end{aligned}$$

Skorzystalismy tu z równości $t' - s' = t - s$ oraz monotoniczności energii. Dla z' dostatecznie blisko z – jednostajnie względem K – mamy więc $\Phi_{z'}^K(s'; u_K) \leq \frac{\gamma + \varepsilon_0^2}{2}$, skąd $z' \notin \mathcal{S}$. To uzasadnia domkniętość \mathcal{S} .

Zerową miarę Hausdorffa wystarczy pokazać dla każdego podzbioru postaci

$$\mathcal{S}_{[T_0, T_1]} := \mathcal{S} \cap ([T_0, T_1] \times \mathbb{T}^n) \quad (0 < T_0 < T_1 < \infty).$$

Zacznijmy od analizy koncentracji energii wokół pojedynczego punktu $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathcal{S}_{[T_0, T_1]}$. Zgodnie z definicją, dla każdego $s > 0$ mamy $\liminf_{K \rightarrow \infty} \Phi_{z_0}^K(s) \geq \varepsilon_0^2$ (dla skrótów pomijamy tu u_K). Dla dostatecznie dużych K (jak dużych, to zależy od s) daje to nierówność $\Phi_{z_0}^K(s) \geq \varepsilon_0^2/2$. Przyjmijmy teraz, że $s = (\gamma r)^2$ dla pewnego promienia $r > 0$ i małego współczynnika $\gamma > 0$. Wielkość $\Phi_{z_0}^K(s)$ chcielibyśmy porównać z lokalną energią $r^{2-n} \int_{B_r(x_0)} e_K(u_{t_0-s})$. W tym celu zauważmy, że

$$\rho_s(y) \leq \gamma^{-n} r^{-n} \text{ na } B_r, \quad \rho_s(y) \leq 2^{n/2} \gamma^{-n} e^{-\frac{1}{8\gamma^2}} \rho_{s+r^2}(y) \text{ poza } B_r.$$

Pierwsza z nierówności wynika wprost ze wzoru $\rho_s(y) = (4\pi s)^{-n/2} \exp(-|y|^2/4s)$, a druga wymaga porównania:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_s(y)}{\rho_{s+r^2}(y)} &= \left(\frac{s}{s+r^2} \right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4s} + \frac{|y|^2}{4(s+r^2)} \right) \\ &= (1 + \gamma^{-2})^{n/2} \exp\left(-\frac{|y|^2}{4r^2} \cdot \frac{1}{\gamma^2(1 + \gamma^2)} \right) \\ &\leq 2^{n/2} \gamma^{-n} e^{-\frac{1}{8\gamma^2}} \end{aligned} \quad \text{dla } |y| \geq r, \gamma \leq 1.$$

W konsekwencji tych nierówności mamy

$$H_s e_K(u_{t_0-s})(x_0) \leq \gamma^{-n} r^{-n} \int_{B_r(x_0)} e_K(u_{t_0-s}) \, dy + 2^{n/2} \gamma^{-n} e^{-\frac{1}{8\gamma^2}} H_{s+r^2} e_K(u_{t_0-s})(x_0).$$

Zanim domnożymy obie strony przez s , zwróćmy uwagę na oszacowania drugiego składnika:

$$\begin{aligned} s \cdot \gamma^{-n} e^{-\frac{1}{8\gamma^2}} H_{s+r^2} e_K(u_{t_0-s})(x_0) &\leq \gamma^{-n} e^{-\frac{1}{8\gamma^2}} \cdot \Phi_{(t_0+r^2, x_0)}^K(s+r^2) && \text{z definicji } \Phi \\ &\leq \gamma^{-n} e^{-\frac{1}{8\gamma^2}} \cdot \Phi_{(t_0+r^2, x_0)}^K(T_0) && \text{z formuły monotonicznej} \\ &\leq \gamma^{-n} e^{-\frac{1}{8\gamma^2}} \cdot T_0 (4\pi T_0)^{-n/2} E(u_0) \\ &\leq 2^{-n/2} \cdot \frac{\varepsilon_0^2}{4} && \text{dla dost. małego } \gamma > 0. \end{aligned}$$

Ostatnia z nierówności jest możliwa dzięki temu, że $\gamma^{-n} e^{-\frac{1}{8\gamma^2}} \rightarrow 0$ przy $\gamma \rightarrow 0$; możemy więc wybrać γ , dla którego oszacowanie jest tak małe, jak żądamy. Ustalamy więc takie γ (zależnie od T_0 i $E(u_0)$), a wówczas domnożenie poprzedniej nierówności przez s daje

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0^2}{2} \leq \Phi_{z_0}^K(s) &\leq C(n, T_0, E(u_0)) \cdot s r^{-n} \int_{B_r(x_0)} e_K(u_{t_0-s}) \, dy + \frac{\varepsilon_0^2}{4}, \\ \varepsilon_0^2 &\lesssim s r^{-n} \int_{B_r(x_0)} e_K(u_{t_0-s}) \, dy. \end{aligned}$$

Z formuły monotonicznej mamy również $\Phi_{z_0}^K(s') \geq \varepsilon_0^2/2$ dla wszystkich $s' \in [s, 2s]$. To samo rozumowanie można więc przeprowadzić dla s' (być może nieznacznie zmniejszając wartość γ), co po uśrednieniu daje

$$\varepsilon_0^2 \lesssim \int_s^{2s} s' r^{-n} \int_{B_r(x_0)} e_K(u_{t_0-s'}) \, dy \, ds' \lesssim r^{-n} \int_{[t_0-s, t_0-2s] \times B_r(x_0)} e_K(u) \, dy \, dt.$$

W szczególnym przypadku $n = 2$ nietrudno dokończyć rozumowanie i bezpośrednio wykazać skończoność zbioru $\mathcal{S}_{[T_0, T_1]}$ (zadanie ??).

Całka po większym obszarze $Q_r(z_0)$ tym bardziej daje co najmniej $\varepsilon_0^2 \cdot r^n$.

Jesteśmy gotowi na oszacowanie $\mathcal{H}_\delta^n(\mathcal{S}_{[T_0, T_1]})$; możemy przy tym przyjąć, że $\delta < T_0^2$. Weźmy najpierw dowolne pokrycie $\mathcal{S}_{[T_0, T_1]}$ kulami $Q_{5r_i}(z_i)$ o środkach w tym zbiorze, spełniającymi $5r_i < \delta$ (można z góry przyjąć $r_i := \delta/10$). Dzięki zwartości możemy wybrać podpokrycie skończone. Następnie na mocy lematu pokryciowego Vitaliego (zadanie ??) wybierzmy takie podpokrycie, dla którego kule $Q_{r_i}(z_i)$ są rozłączne.

Skoro mamy do czynienia ze skończeniem wieloma kulami, dla dostatecznie dużych K możemy zastosować rozumowanie wyżej, otrzymując $r_i^n \lesssim \int_{Q_{r_i}(z_i)} e_K(u)$ dla wszystkich i . Po zsumowaniu otrzymujemy

$$\sum_i r_i^n \lesssim \int_{\bigcup_i Q_{r_i}(z_i)} e_K(u) \leq \int_{[T_0, T_1]} \int_{\mathbb{T}^n} e_K(u) \leq T_1 E(u_0)$$

na mocy nierówności energetycznej. To dowodzi skończoności $\mathcal{H}^n(\mathcal{S}_{[T_0, T_1]})$. \square

Lemat 7.11. *Załóżmy, że $u: [0, T] \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ jest funkcją mierzalną spełniającą $u \in C([0, T], L^2(\mathbb{T}^n))$ oraz $\partial_t u, \nabla u \in L^2([0, T] \times \mathbb{T}^n)$. Jeśli u jest gładkim rozwiązaniem (HMF) poza pewnym domkniętym zbiorem \mathcal{S} o lokalnie skończonej n -wymiarowej parabolicznej mierze Hausdorffa, to u jest słabym rozwiązaniem (HMF) (według Definicji 6.1) na $[0, T] \times \mathbb{T}^n$.*

Dowód. Zaczniemy od pokazania dla wybranego $\varphi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{T}^n)$, że

$$0 = \int_{(0, T) \times \mathbb{T}^n} \partial_t u \varphi + \nabla u \nabla \varphi - A_u(\nabla u, \nabla u) \varphi \, dx \, dt,$$

co można uznać za inną definicję słabego rozwiązania. Ustalmy $\delta > 0$ i wybierzmy pokrycie $\mathcal{S} \cap \text{supp } \varphi$ skończeniem wieloma kulami parabolicznymi $Q_{r_i}(z_i)$ spełniające $r_i < \delta$ oraz $\sum_i r_i^n \leq B$ (to ostatnie jest możliwe dzięki zwartości $\text{supp } \varphi$ i lokalnej skończoności $\mathcal{H}^n(\mathcal{S})$). Ustalmy też funkcję wycinającą

$$\kappa \in C^\infty, \quad \kappa \equiv 0 \text{ na } Q_1(0), \quad \kappa \equiv 1 \text{ poza } Q_2(0),$$

oraz przyjmijmy $\kappa_i(t, x) = \kappa(\frac{t-t_i}{r_i^2}, \frac{x-x_i}{r_i})$. Wówczas funkcja $\eta_\delta = \min_i \kappa_i$ zeruje się na otoczeniu \mathcal{S} , a jednocześnie jest równa 1 poza $\bigcup Q_{2r_i}(z_i)$. Odnotujmy, że

$$\int_{[0, T] \times \mathbb{T}^n} |\nabla \eta_\delta|^2 \leq \sum_i \int_{Q_{2r_i}(z_i)} |\nabla \kappa_i|^2 \lesssim \sum_i r_i^{n+2} \cdot r_i^{-2} \leq B.$$

Poza \mathcal{S} funkcja u jest gładkim rozwiązaniem (HMF); mnożąc to równanie przez $\eta_\delta \varphi$ i całkując przez części, otrzymujemy

$$0 = \int_{(0, T) \times \mathbb{T}^n} \partial_t u \eta_\delta \varphi + \nabla u (\nabla \eta_\delta \varphi + \eta_\delta \nabla \varphi) - A_u(\nabla u, \nabla u) \eta_\delta \varphi \, dx \, dt.$$

Funkcja $\eta\varphi$ nie jest co prawda gładka, ale spełnia warunek Lipschitza i w szczególności należy do $W^{1,2}$, co uzasadnia całkowanie przez części i regułę Leibniza. Z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej większość członów wyżej zbiega do swoich odpowiedników pozbawionych η_δ , ponieważ $\eta_\delta \rightarrow 0$ p.w. Pozostaje wykazać zbieżność do zera wyrazu z pochodnymi η_δ :

$$\left| \int_{(0,T) \times \mathbb{T}^n} \nabla u \nabla \eta_\delta \varphi \right| \leq \|\varphi\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2(\cup Q_{2r_i}(z_i))} \|\nabla \eta_\delta\|_{L^2} \lesssim B \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\cup Q_{2r_i}(z_i))} \rightarrow 0.$$

Zbieżność do zera zachodzi na mocy absolutnej ciągłości całki względem miary – zbiór $\cup Q_{2r_i}(z_i)$ ma bowiem miarę kontrolowaną przez sumę $\sum r_i^{n+2}$, a więc przez $B\delta^2$.

Przypomnijmy, że według Definicji 6.1 do zweryfikowania mamy nieznacznie inny warunek

$$\int_{\mathbb{T}^n} u \varphi \, dx \Big|_{t=0}^{t=T} = \int_{[0,T] \times \mathbb{T}^n} u \partial_t \varphi - \nabla u \nabla \varphi + A_u(\nabla u, \nabla u) \varphi \, dx \, dt$$

dla $\varphi \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{T}^n)$. Ustalmy więc takie φ . Za η_δ przyjmijmy teraz funkcję jednej zmiennej $\eta_\delta \in C_c^\infty((0, T))$ spełniającą $0 \leq \eta_\delta \leq 1$, $\eta_\delta \equiv 1$ na $[\delta, T - \delta]$ oraz $|\eta'_\delta| \lesssim \delta^{-1}$. Funkcji $\eta_\delta \varphi$ możemy użyć jako funkcji testowej w już wykazanym słabym sformułowaniu; po scałkowaniu przez części po czasie daje nam to

$$- \int_{[0,T] \times \mathbb{T}^n} \eta'_\delta u \varphi = \int_{[0,T] \times \mathbb{T}^n} \eta_\delta (u \partial_t \varphi - \nabla u \nabla \varphi + A_u(\nabla u, \nabla u) \varphi)$$

Przy $\delta \rightarrow 0$ prawa strona zbiega do żądanego wyrażenia. Natomiast lewą stronę możemy przepisać jako

$$- \int_0^t \left(\int_{\mathbb{T}^n} u_t \varphi_t \, dx \right) \eta'_\delta(t) \, dt.$$

Wyraz w nawiasie jest ciągłą funkcją zmiennej $t \in [0, T]$, a $-\eta'_\delta(t) \, dt$ jako miara zbiega słabo-* do $\delta_T - \delta_0$, co kończy dowód. \square

7.7 Twierdzenie Chen-Struwego

Podsumujmy analizę poprzednich podrozdziałów w postaci następującego twierdzenia [CS89] (zob. też [LW08, Th. 7.6.5]):

Twierdzenie 7.12. *Dla dowolnego $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ istnieje funkcja $u: [0, \infty) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N}$ będąca słabym rozwiązaniem (HMF) (w sensie Definicji 6.1), spełniająca $E(u_t) \leq E(u_0)$ dla p.w. t oraz $\partial_t u \in L^2([0, \infty) \times \mathbb{T}^n)$.*

Ponadto u jest gładkim rozwiązaniem (HMF) poza domkniętym zbiorem osobliwym $\mathcal{S} \subseteq (0, \infty) \times \mathbb{T}^n$ o zerowej n -wymiarowej parabolicznej mierze Hausdorffa.

Dowód. Dla ustalonego $K \in \mathbb{N}$ Twierdzenie 7.1 daje nam istnienie jednoznacznego gładkiego rozwiązania u^K problemu pomocniczego (HMF-GL). Zgodnie z nierównością energetyczną (Lemat 7.5)

$$\sup_{t>0} E_K(u_t^K), \int_0^\infty \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_t u_s^K|^2 \, dx \, ds \leq E(u_0)$$

dla każdego K . Wnioskujemy stąd (przy użyciu twierdzeń Banacha-Alaoglu i Rellicha-Kondraszowa), że na podciągu u_K zbiega do pewnego u :

$$\begin{aligned}\nabla u^K &\rightarrow \nabla u && \text{słabo-* w } L^\infty((0, \infty), L^2(\mathbb{T}^n)), \\ \partial_t u^K &\rightarrow \partial_t u && \text{słabo w } L^2((0, \infty) \times \mathbb{T}^n), \\ u^K &\rightarrow u && \text{silnie w } L^2((0, \infty) \times \mathbb{T}^n).\end{aligned}$$

Uzasadnia to $E(u_t) \leq E(u_0)$ oraz $\partial_t u \in L^2([0, \infty) \times \mathbb{T}^n)$, jak również ciągłość $t \mapsto u_t \in L^2$ i warunek $u_t \rightarrow u_0$ w L^2 . Jednocześnie nie wiemy jeszcze, że u rozwiązuje (HMF), a nawet, że ma wartości w \mathcal{N} .

Rozważmy zbiór osobliwy \mathcal{S} jak w poprzednich rozdziałach. Z rozdziałów 7.4 i 7.5 wiemy, że dla każdego $z \notin \mathcal{S}$ istnieje otoczenie Q , na którym zbieżność jest lepsza, a w rezultacie $u \in C^\infty(Q)$ jest gładkim rozwiązaniem (HMF) na tym otoczeniu. To dowodzi w szczególności, że $u_t(x) \in \mathcal{N}$ dla p.w. (t, x) .

Z Lematu 7.10 wiemy, że zbiór osobliwy \mathcal{S} jest domknięty oraz $\mathcal{H}^n(\mathcal{S}) = 0$. Możemy więc zastosować Lemat 7.11 i wywnioskować, że u jest słabym rozwiązaniem na całej swojej dziedzinie. To kończy dowód twierdzenia. \square

7.8 Zadania

Zadanie 7.1. Wyprowadzić formułę monotoniczną z Lematu 7.5: jeśli u jest K -rozwiązaniem (HMF-GL) oraz $e_K(u) := \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + KF(u)$, to

$$\Phi_{(t_0, x_0)}^K(s; u) := sH_s(e_K(u_{t_0-s}))(x_0)$$

jest niemalejącą funkcją argumentu $s > 0$.

Zadanie 7.2. Niech $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ będzie zamkniętą podrozmaitością, oraz niech $G_p := \text{dist}(p, \mathcal{N})$. Sprawdzić, że hesjan kwadratu tej funkcji jest ograniczony z dołu w sensie formy kwadratowej:

$$-\nabla^2(G^2) \leq C(\mathcal{N}) \cdot G \cdot I \quad \text{w otoczeniu tubularnym } \mathcal{N}_\delta,$$

co oznacza, że $-\nabla^2(G^2)_p(v, v) \leq C \cdot G_p \cdot |v|^2$ dla $v \in \mathbb{R}^d$.

Wskazówka. Przedstawić G_p^2 jako $|\pi(p) - p|^2$ i naśladować rachunek z końca podrozdziału 4.2.

Zadanie 7.3. Przekonać się, że jeśli $f, g \in W^{1,2}$, a ponadto $f \in L^\infty$, to $f \cdot g \in W^{1,1}$ oraz – co nie powinno być zaskakujące – $\nabla(f \cdot g) = \nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g$.

Dodatek A

Krzywizna Riemanna w ujęciu wewnętrznym

Na potrzeby niniejszego skryptu krzywiznę Riemanna wprowadzono w (3.1) jako cechę rozmaitości zależną od jej zanurzenia w przestrzeń euklidesową. Dodatek ten służy uzupełnieniu tego braku – w najkrótszy możliwy sposób wprowadza krzywiznę Riemanna dla abstrakcyjnej rozmaitości Riemanna, a następnie zestawia ją z definicją podaną w rozdziale 3.4.

W żadnym przypadku nie należy uważać, że jest to właściwe źródło do nauki. Abstrahując od ewentualnych błędów, celowo pominięte zostały rozmaite szczegóły i motywacje. Zainteresowanych tematem zachęcam za to do dalszej lektury – godne polecenia są np. książki Johna M. Lee [Lee97] i Petera Petersena [Pet06].

A.1 Koneksja Levi-Civity

Niech \mathcal{M} będzie abstrakcyjną gładką rozmaitością Riemanna. Oznaczmy przez $T\mathcal{M}$ wiązkę styczną tej rozmaitości, a przez \mathcal{TM} przestrzeń wszystkich gładkich pól stycznych na \mathcal{M} :

$$\mathcal{TM} = \{X: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M} : X(p) \in T_p\mathcal{M} \text{ dla } p \in \mathcal{M}\}.$$

Jest to nie tylko przestrzeń liniowa nad \mathbb{R} , ale również moduł nad $C^\infty(\mathcal{M})$ – iloczyn gładkiej funkcji i gładkiego pola stycznego jest również gładkim polem stycznym.

Koneksję na wiązce stycznej $T\mathcal{M}$ [Lee97, Ch. 4] nazwiemy dowolne przekształcenie

$$\nabla: \mathcal{TM} \times \mathcal{TM} \rightarrow \mathcal{TM},$$

spełniające następujące trzy warunki (obowiązuje konwencja notacyjna $\nabla(X, Y) = \nabla_X Y$):

(a) $\nabla_X Y$ jest $C^\infty(\mathcal{M})$ -liniowe względem X :

$$\nabla_{fX_1 + gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y \quad \text{dla } f, g \in C^\infty(\mathcal{M});$$

(b) $\nabla_X Y$ jest \mathbb{R} -liniowe względem Y :

$$\nabla_X (aY_1 + bY_2) = a\nabla_X Y_1 + b\nabla_X Y_2 \quad \text{dla } a, b \in \mathbb{R};$$

Koneksja jest formalizacją idei różniczkowania pola Y w kierunku X . Na rozmaitości gładkiej (bez struktury Riemanna) istnieje jednak wiele różnych koneksji.

(c) ∇ spełnia warunek Leibniza:

$$\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (\nabla_X f)Y \quad \text{dla } f \in C^\infty(M).$$

Nadużycie notacji: $\nabla_X f$ oznacza tu po prostu pochodną f w kierunku X

Koneksję ∇ nazwiemy *koneksją Levi-Civity* [Lee97, Ch. 5], jeśli spełnia następujące dodatkowe warunki:

(a) ∇ jest *symetryczna*, czyli

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{dla } X, Y \in \mathcal{TM}.$$

$[X, Y]$ to nawias Liego:
 $\nabla_{[X, Y]} f = \nabla_X(\nabla_Y f) - \nabla_Y(\nabla_X f)$

(b) ∇ jest *metryczna*, czyli

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \quad \text{dla } X, Y, Z \in \mathcal{TM}.$$

Okazuje się, że na ustalonej rozmaitości gładkiej z metryką Riemanna istnieje dokładnie jedna koneksja Levi-Civity [Lee97, Th. 5.4].

A.2 Koneksja Levi-Civity na podrozmaitości

W przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n naturalnym wyborem koneksji jest różniczkowanie po współrzędnych. Będziemy ją oznaczać symbolem $\bar{\nabla}$:

$$\bar{\nabla}_X \left(\sum_{j=1}^n Y_j e_j \right) := \sum_{j=1}^n (\nabla_X Y_j) e_j.$$

Łatwo się przekonać, że jest to koneksja Levi-Civity.

Założmy teraz, że $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ jest gładką podrozmaitością. Jeśli $X, Y: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ są dwoma polami stycznymi na \mathcal{M} , to możemy je dowolnie przedłużyć na całą przestrzeń i rozważyć \mathbb{R}^n , a następnie rozważyć pole $\bar{\nabla}_X Y$. Nie zależy ono od wyboru przedłużeń, ale nie jest styczne do \mathcal{M} . W związku z tym definiujemy $\nabla_X Y$ jako rzut $\bar{\nabla}_X Y$ na przestrzeń styczną:

$$\nabla_X Y(p) := P_{T_p \mathcal{M}}(\bar{\nabla}_X Y(p)).$$

Sprawdzenie, że koneksja euklidesowa $\bar{\nabla}$ i skonstruowana niżej koneksja styczna ∇ spełniają warunki (a) i (b) koneksji Levi-Civity, idzie wbrew logice. To raczej te przykłady kierują nas ku aksjomatom (a), (b).

Ponownie łatwo sprawdzić, że daje to koneksję Levi-Civity na \mathcal{M} .

Warto odnotować związek z drugą formą podstawową A . Zgodnie z Definicją 3.6 i uwagą ją poprzedzającą, $A(X, Y)$ jest składową prostopadłą $\bar{\nabla}_X Y$, wziętą z przeciwnym znakiem. Mamy więc równość

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + A(X, Y),$$

znaną jako wzór Gaussa [Lee97, Th. 8.2].

A.3 Krzywizna Riemanna

Endomorfizm krzywizny Riemanna $R: \mathcal{TM} \times \mathcal{TM} \times \mathcal{TM} \rightarrow \mathcal{TM}$ [Lee97, Ch. 7] definiujemy wzorem

$$R(a, b)c := \nabla_a \nabla_b c - \nabla_b \nabla_a c - \nabla_{[a, b]}c \quad \text{dla } a, b, c \in \mathcal{TM}.$$

Wprost z definicji, łatwo sprawdzić $C^\infty(M)$ -wieloliniowość R względem swoich trzech argumentów.

Krzywiznę Riemanna wprowadzamy jako

$$\text{Rm}(a, b, c, d) := \langle R(a, b)c, d \rangle \quad \text{dla } a, b, c, d \in \mathcal{TM}.$$

Jest to z kolei funkcja $C^\infty(M)$ -wieloliniowa swoich czterech argumentów. Nietrudno sprawdzić też symetrie Rm wymienione w Zadaniu 3.8.

A.4 Równanie Gaussa

Pozostaje sprawdzić, że zdefiniowana właśnie krzywizna Riemanna spełnia równanie Gaussa (3.1), które posłużyło nam jako definicja w rozdziale 3.4:

Twierdzenie A.1 (*Theorema Egregium* Gaussa [Lee97, Th. 8.4]). *Niech $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie gładką podrozmaitością. Wówczas jej krzywizna Riemanna Rm dla dowolnych pól stycznych a, b, c, d na \mathcal{M} spełnia równość*

$$\text{Rm}(a, b, c, d) = \langle A(a, d), A(b, c) \rangle - \langle A(a, c), A(b, d) \rangle,$$

gdzie A jest drugą formą podstawową zanurzenia.

Dowód. Skorzystamy wielokrotnie z rozkładu $\nabla_u v = \bar{\nabla}_u v + A(u, v)$ i z faktu, że $A(u, v)$ jest wektorem prostopadłym do w .

Korzystając ze styczności d , mamy

$$\begin{aligned} \text{Rm}(a, b, c, d) &= \langle \nabla_a \nabla_b c - \nabla_b \nabla_a c - \nabla_{[a, b]}c, d \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_a \nabla_b c - \bar{\nabla}_b \nabla_a c - \bar{\nabla}_{[a, b]}c, d \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_a \bar{\nabla}_b c - \bar{\nabla}_b \bar{\nabla}_a c - \bar{\nabla}_{[a, b]}c, d \rangle + \langle \bar{\nabla}_a A(b, c) - \bar{\nabla}_b A(a, c), d \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_a A(b, c) - \bar{\nabla}_b A(a, c), d \rangle, \end{aligned}$$

przy czym w ostatniej linijce skorzystaliśmy z faktu, że przestrzeń euklidesowa \mathbb{R}^n ma zerową krzywiznę Riemanna.

Odnotujmy prostopadłość $\langle A(b, c), d \rangle \equiv 0$, z której w szczególności wynika $\nabla_a \langle A(b, c), d \rangle \equiv 0$. W połączeniu z metrycznością koneksji $\bar{\nabla}$ oraz rozkładem $\bar{\nabla}_a d = \nabla_a d - A(a, d)$ (na część styczną i prostopadłą) daje nam to równości

$$\langle \bar{\nabla}_a A(b, c), d \rangle = -\langle A(b, c), \bar{\nabla}_a d \rangle = \langle A(b, c), A(a, d) \rangle.$$

Analogiczna równość $\langle \bar{\nabla}_b A(a, c), d \rangle = \langle A(a, c), A(b, d) \rangle$ zachodzi dla drugiego członu, co kończy dowód. \square

Dodatek B

Uzupełnienie wiedzy o przestrzeniach Sobolewa

W literaturze bardzo łatwo o dobry (w tym: zwięzły, zrozumiały, dobrze umotywowany) wstęp do tej dziedziny. Osobiście najbardziej polecam książeczkę Strzeleckiego [Str06, Rozdz. 6], w której mieści się on na 20 stronach. Szersze omówienie tego tematu można znaleźć w książce Evansa [Eva10, Ch. 5], nietrudno też znaleźć książki w całości poświęcone przestrzeniom Sobolewa.

W poniższym dodatku starałem się przytoczyć te elementy teorii, które wydały mi się kluczowe dla zrozumienia wykładu, zwłaszcza począwszy od rozdziału 6. Oprócz pojęć naprawdę podstawowych znalazło się tu też krótkie omówienie funkcji Sobolewa o wartościach w zadanej rozmaitości. Dla zacytowanych twierdzeń dowody podaję jedynie w tych przypadkach, w których nie jest łatwo je zlokalizować w literaturze.

B.1 Podstawowe pojęcia

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n . Przez $C_c^\infty(\Omega)$ będziemy oznaczać przestrzeń funkcji gładkich $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ o zwartym nośniku (a więc zerujących się na pewnym otoczeniu $\partial\Omega$).

Niech $u, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będą dwiema funkcjami lokalnie całkownymi. Powiemy, że g jest słabą pochodną cząstkową u względem x_α (piszemy: $g = \partial_\alpha u$), jeśli

$$\int_{\Omega} u(x) \partial_\alpha \varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) \, dx \quad \text{dla dow. } \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (\text{B.1})$$

Całkowanie przez części pokazuje, że jeśli funkcja u jest klasy $C^1(\Omega)$, to jej klasyczna pochodna jest również jej słabą pochodną.

W ogólnym przypadku pozwalamy sobie na zapis $g = \partial_\alpha u$, gdyż funkcja g jest wyznaczona jednoznacznie przez warunek (B.1). Wynika to z tzw. *podstawowego lematu rachunku wariacyjnego*, znanego też jako lemat du Bois-Reymonda:

Lemat B.1 (podstawowy lemat rachunku wariacyjnego). *Jeśli $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ oraz*

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx = 0 \quad \text{dla } \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

to $f = 0$ prawie wszędzie.

Tak jak w przypadku klasycznym, mówi się również o słabym gradiencie $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)$. Korzystając z tego pojęcia, warunki (B.1) dla poszczególnych $\alpha = 1, \dots, n$ można streścić w jednym równaniu:

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) \, dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla u(x), \varphi(x) \rangle \, dx \quad \text{dla } \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Funkcje klasy Sobolewa stanowią słaby odpowiednik funkcji klasy C^1 . Można je wprowadzić na co najmniej dwa sposoby – jeden z nich korzysta z pojęcia słabej pochodnej:

Definicja B.2 (przestrzeń Sobolewa).

- (a) Przestrzeń $W^{1,p}(\Omega)$ składa się z tych funkcji $u \in L^p(\Omega)$, które dla wszystkich $\alpha = 1, \dots, n$ mają słabe pochodne $\partial_\alpha u \in L^p(\Omega)$.
- (b) Przestrzeń $H^{1,p}(\Omega)$ określamy jako uzupełnienie przestrzeni liniowej

$$\{u \in C^1(\Omega) : u \in L^p(\Omega), \nabla u \in L^p(\Omega)\}$$

w normie $\|u\| := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

W obu przypadkach na zdefiniowanej przestrzeni rozważamy tę samą normę

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

W obu przypadkach jest jasne, że powstała przestrzeń jest zupełna (choć dla $W^{1,p}$ wymaga to uzasadnienia), a więc jest przestrzenią Banacha. Nietrudno też uzasadnić zawieranie $H^{1,p} \subseteq W^{1,p}$ (przy odpowiednim utożsamieniu). Przeciwnie zawieranie jest również prawdziwe, ale nieoczywiste – stanowi konsekwencję twierdzenia Meyersa-Serrina:

Twierdzenie B.3 (Meyersa-Serrina). *Dla dowolnej funkcji $u \in W^{1,p}(\Omega)$ istnieje ciąg funkcji gładkich $u_k \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ zbieżny do u w normie $W^{1,p}(\Omega)$.*

Innymi słowy, $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ jest gęstą podprzestrzenią $W^{1,p}(\Omega)$. Interesujące są również dwa szczególne, istotnie łatwiejsze przypadki:

- $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest gęstą podprzestrzenią $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$;
- $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ jest gęstą podprzestrzenią $W^{1,p}(\mathbb{T}^n)$.

Twierdzenie B.3 implikuje, że $H^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. W związku z tym nie będziemy rozróżniali między tymi dwiema przestrzeniami.

Warto wspomnieć tu o podstawowej technice dowodowej używanej w tej dziedzinie, a mianowicie o splotach:

$$(u * \varphi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\varphi(y) \, dy.$$

Splot jest dobrze określony na przykład, gdy $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ i $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Splot $u * \varphi_\varepsilon$ jest wówczas funkcją gładką. Jednocześnie łatwo sprawdzić wprost z definicji, że jej słabym gradientem jest funkcja $(\nabla u) * \varphi$.

W miejsce φ można przyjąć $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi_1(x/\varepsilon)$, gdzie $\varphi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ jest ustaloną nieujemną funkcją o całości równej 1. Wówczas zbieżność $u * \varphi_\varepsilon \rightarrow u$ i $\nabla u * \varphi_\varepsilon \rightarrow \nabla u$ w $L^p(\mathbb{R}^n)$ (przy $\varepsilon \rightarrow 0$) daje dowód Twierdzenia B.3 w szczególnym przypadku $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Ćwiczenie na zrozumienie definicji: jak elementowi $u \in H^{1,p}$ przyporządkować funkcję $u \in L^p$ i jej słaby gradient $\nabla u \in L^p$?

Twierdzenie to zostało opublikowane w 1964 roku w półtorastronicowej pracy o zwięzłym tytule „ $H = W$ ”

B.2 Fundamentalne twierdzenia

Twierdzenie B.4 (Sobolewa o włożeniu). *Załóżmy, że $1 \leq p < n$. Wówczas każda funkcja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ należy do $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, gdzie $p^* = \frac{np}{n-p}$. Ponadto*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \right)^{1/p^*} \leq C(n,p) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \right)^{1/p}.$$

Twierdzenie B.5 (Morreya). *Załóżmy, że $p > n$. Wówczas każda funkcja $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ posiada ciągłego reprezentanta, który spełnia warunek Höldera z wykładnikiem $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$.*

Twierdzenie B.6 (Rellicha-Kondraszowa). *Załóżmy, że $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest obszarem ograniczonym o brzegu klasy C^1 . Wówczas włożenie $W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$ jest zwarte. Innymi słowy: z dowolnego ciągu ograniczonego w $W^{1,p}(\Omega)$ można wybrać podciąg zbieżny w normie $L^p(\Omega)$.*

W powyższym twierdzeniu można zastąpić p przez dowolny wykładnik $1 \leq q < p^*$ (gdy $1 \leq p < n$) lub wykładnik $1 \leq q < \infty$ (gdy $p \geq n$). Założenie o ograniczoności Ω jest jednak kluczowe.

Na koniec tej sekcji przytoczmy jeszcze elementarny lemat o możliwości złożenia $\pi \circ u$ funkcji Sobolewa u z funkcją gładką π . Na jego potrzeby przyjmujemy, że $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ należy do $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u^j \in W^{1,p}(\Omega)$ dla wszystkich $j = 1, \dots, d$.

Lemat B.7. *Jeśli $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ oraz $\pi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$, to funkcja $v := \pi \circ u$ również leży w $W^{1,p}$. Ponadto zachodzi wzór na różniczkę złożenia: $\partial_\alpha v = \nabla \pi_u \partial_\alpha u$ w słabym sensie.*

Dowód. Jest jasne, że funkcja $\nabla \pi_u \partial_\alpha u$ leży w L^p , więc pozostaje sprawdzić, że jest słabą pochodną v . Ustalmy w tym celu funkcję testową $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Na mocy Twierdzenia B.3 istnieje ciąg gładkich przybliżeń $u_k \rightarrow u$ w $W^{1,p}$, i oczywiście podobne słabe sformułowanie jest prawdą dla u_k :

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla \pi_{u_k} \partial_\alpha u_k \, dx = - \int_{\Omega} \partial_\alpha \varphi \pi_{u_k} \, dx.$$

Zbieżność prawej strony wynika wprost z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej: $u_k \rightarrow u$ p.w. i w rezultacie $\pi_{u_k} \rightarrow \pi_u$ p.w. Z lewej strony możemy zastosować nierówność trójkąta

$$\left| \int_{\Omega} \varphi (\nabla \pi_{u_k} \partial_\alpha u_k - \nabla \pi_u \partial_\alpha u) \right| \leq \left| \int_{\Omega} \varphi \nabla \pi_{u_k} (\partial_\alpha u_k - \partial_\alpha u) \right| + \left| \int_{\Omega} \varphi (\nabla \pi_{u_k} - \nabla \pi_u) \partial_\alpha u \right|.$$

Pierwszy wyraz szacuje się przez stałą razy $\int |\varphi| |\nabla u_k - \nabla u|$, więc zbiega do zera na mocy $u_k \rightarrow u$ w $W^{1,p}$. Zbieżność drugiego wyrazu ponownie uzasadniamy za pomocą twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. \square

B.3 Nierówności typu Poincarého

Nierównością typu Poincarého nazwiemy każde twierdzenie postaci: „wielkość $|u|$ jest ograniczona przez wielkość $|\nabla u|$ ”. Być może najprostszym sformułowaniem tego typu jest nierówność $|u(x) - u(y)| \leq |x - y| \cdot \|u'\|_\infty$.

Do późniejszych zastosowań będzie nam potrzebny Lemat B.9 – nierówności Poincarého z gładką wagą. W tym celu zacznijmy od wyniku pomocniczego:

Lemat B.8. *Jeśli $u: B_r \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^1 oraz $x \in B_r$, to*

$$\int_{B_r} |u(x) - u(y)| \, dy \lesssim \int_{B_r} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} \, dy$$

ze stałą niezależną od x .

Dowód. Każdy punkt $y \in B_r$ (poza $y = x$) możemy przedstawić jednoznacznie w postaci $x + t\lambda$ dla pewnych $t > 0$ i $\lambda \in \mathbb{S}^{n-1}$. Różnicę $|u(x) - u(y)|$ szacujemy wtedy przez pochodną kierunkową:

$$|u(x) - u(y)| = |u(x + s\lambda)|_{s=0}^{s=t} \leq \int_0^t |\lambda \cdot \nabla u(x + s\lambda)| \, ds \leq \int_0^{t(\lambda)} |\nabla u(x + s\lambda)| \, ds.$$

Za $t(\lambda) > 0$ przyjęliśmy tutaj maksymalną możliwą wartość, czyli $\max\{t > 0 : x + t\lambda \in B_r\}$. Całkując po wszystkich $y \in B_r$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |u(x) - u(y)| \, dy &= \frac{1}{|B_r|} \int_0^{2r} \int_{S_t(x)} |u(x) - u(y)| \mathbb{1}_{y \in B_r} \, dy \, dt \\ &= \frac{1}{|B_r|} \int_0^{2r} t^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |u(x) - u(x + t\lambda)| \mathbb{1}_{x+t\lambda \in B_r} \, d\lambda \, dt \\ &\leq \frac{1}{|B_r|} \int_0^{2r} t^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{t(\lambda)} |\nabla u(x + s\lambda)| \, ds \, d\lambda \, dt. \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Fubiniego, obliczamy osobno całkę $\int_0^{2r} t^{n-1} \, dt = \frac{1}{n}(2r)^n$, co daje nam

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |u(x) - u(y)| \, dy &\lesssim \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{t(\lambda)} |\nabla u(x + s\lambda)| \, ds \, d\lambda \\ &= \int_0^{2r} s^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|\nabla u(x + s\lambda)|}{s^{n-1}} \mathbb{1}_{x+s\lambda \in B_r} \, d\lambda \, ds \\ &= \int_{B_r} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} \, dy. \end{aligned}$$

□

A interesująca nas nierówność Poincarého jest następująca:

Lemat B.9. *Niech $u \in W^{1,1}(B_1)$. Załóżmy, że funkcja $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$ jest nieujemna i spełnia $\int_{B_1} \varphi = 1$. Zdefiniujmy ponadto $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$ oraz $u_\varepsilon := u * \varphi_\varepsilon$. Wówczas*

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} |u(x) - u_\varepsilon(x_0)| \, dx \lesssim \varepsilon \cdot \|\varphi\|_\infty \int_{B_\varepsilon(x_0)} |\nabla u(x)| \, dx$$

dla każdej kuli $B_\varepsilon(x_0) \subseteq B_1$.

Dowód. Załóżmy najpierw, że $u \in C^1$. Funkcję podcałkową szacujemy wówczas przy użyciu poprzedniego lematu:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_\varepsilon(x_0)| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x_0)} (u(x) - u(y)) \varphi_\varepsilon(y - x_0) \, dy \right| \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(x_0)} |u(x) - u(y)| \varphi_\varepsilon(y - x_0) \, dy \\ &\lesssim \|\varphi\|_\infty \int_{B_\varepsilon(x_0)} |u(x) - u(y)| \, dy \\ &\lesssim \|\varphi\|_\infty \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x - y|^{n-1}} \, dy. \end{aligned}$$

Zależność od x jest jedynie w mianowniku, a scałkowanie po $x \in B_\varepsilon(x_0)$ daje (przez powiększenie obszaru całkowania i podstawienie)

$$\begin{aligned} \int_{B_\varepsilon(x_0)} \frac{dx}{|x - y|^{n-1}} &\leq \int_{B_{2\varepsilon}(y)} \frac{dx}{|x - y|^{n-1}} \\ &= 2\varepsilon \int_{B_1} \frac{dz}{|z|^{n-1}} \\ &= C(n) \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Korzystając z twierdzenia Fubniego, otrzymujemy więc żadaną nierówność.

W ogólnym przypadku $u \in W^{1,1}(B_1)$ pozostaje powołać się na Twierdzenie B.3. Przyjmijmy ciąg funkcji gładkich $u^{(k)}$ spełniający $u^{(k)} \rightarrow u$ w $W^{1,1}(B_1)$. Ponieważ wówczas $u^{(k)} \rightarrow u$ oraz $\nabla u^{(k)} \rightarrow \nabla u$ w $L^1(B_1)$, a ponadto $u_\varepsilon(x_0)^{(k)} \rightarrow u_\varepsilon(x_0)$, więc z nierówności dla $u^{(k)}$ otrzymujemy w granicy nierówność dla u . \square

Wniosek B.10. *Jeśli w poprzednim twierdzeniu założymy $u \in W^{1,n}(B_1)$, to uzyskujemy*

$$\int_{B_\varepsilon(x_0)} |u(x) - u_\varepsilon(x_0)| \, dx \lesssim \|\varphi\|_\infty \left(\int_{B_\varepsilon(x_0)} |\nabla u(x)|^n \, dx \right)^{1/n}$$

przez zastosowanie nierówności Höldera do prawej strony nierówności.

B.4 Funkcje Sobolewa o wartościach w zadanej rozmaitości

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie – tak jak poprzednio – otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n . Ustalmy też zamkniętą gładką podrozmaitość $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$. Przypomnijmy, że $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ oznacza przestrzeń funkcji u , dla których wszystkie składowe u^j ($j = 1, \dots, d$) leżą w $W^{1,p}(\Omega)$.

Definicja B.11 (przestrzeń Sobolewa). Przestrzeń $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ składa się z funkcji $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$ spełniających $u(x) \in \mathcal{N}$ dla p.w. $x \in \Omega$. Podobnie definiujemy $W^{1,p}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$

Odnotujmy, że $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ nie jest podprzestrzenią liniową $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$, jest za to domkniętym podzbiorem. Załóżmy mianowicie, że $u_k \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ oraz $u_k \rightarrow u$ w $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^d)$. Wówczas na podciągu mamy $u_k \rightarrow u$ p.w. i z domkniętości $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^d$ wnioskujemy, że $u(x) \in \mathcal{N}$ p.w.

Kolejną rzeczą, którą warto odnotować, jest fakt styczności pochodnych u do \mathcal{N} :

Lemat B.12. *Jeśli $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$, to $\partial_\alpha u(x) \in T_{u(x)}\mathcal{N}$ dla $\alpha = 1, \dots, n$ oraz p.w. x .*

Dowód. Niech $\pi: \mathcal{N}_{\varepsilon_0} \rightarrow \mathcal{N}$ będzie rzutem na najbliższy punkt. Zauważmy, że dla p.w. $x \in \Omega$ złożenie $v = \pi \circ u$ jest dobrze określone oraz pokrywa się z u . Możemy π przedłużyć do funkcji $\pi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, by złożenie było poprawnie zdefiniowane wszędzie. Z Lematu B.7 (i jednoznaczności słabej pochodnej) uzyskujemy

$$\partial_\alpha u = \nabla \pi_u \partial_\alpha u \quad \text{dla p.w. } x.$$

Dla tych x , dla których $u(x) \in \mathcal{N}$, różniczka $\nabla \pi_u$ jest rzutem ortogonalnym na przestrzeń styczną $T_{u(x)}\mathcal{N}$, co dowodzi styczności $\partial_\alpha u$. \square

Rozwiązanie (HMF) jest możliwe dla dowolnego przekształcenia początkowego $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$. W przypadku dwuwymiarowej dziedziny konstrukcja Struwego (rozdział 6) zaczyna się jednak od przybliżenia u_0 funkcjami gładkimi; konieczny jest więc poniższy lemat.

Lemat B.13. *Funkcje gładkie $C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ stanowią gęsty podzbiór przestrzeni $W^{1,n}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$.*

Zbieżność wykładnika z wymiarem dziedziny jest tu kluczowa. W ogólności nie jest prawdą, że funkcje gładkie są gęste w $W^{1,p}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$. Innymi słowy, może się zdarzyć, że $H^{1,p}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N}) \neq W^{1,p}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ (a dla ogólnej rozmaitości \mathcal{M} w dziedzinie tym bardziej).

Smutną konsekwencją takiego faktu jest, że dla niektórych $u_0 \in W^{1,2}(\mathbb{T}^n, \mathcal{N})$ – mianowicie dla takich, które nie dają się przybliżyć funkcjami gładkimi – potok (HMF) $u: [0, \infty) \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N}$ tworzy osobliwości w nieskończenie krótkim czasie. Dokładniej, dla każdego $\delta > 0$ posiada osobliwość w $(0, \delta) \times \mathbb{T}^n$. W przeciwnym przypadku zbieżność $u_t \rightarrow u_0$ w $W^{1,2}$ – która faktycznie ma miejsce – dawałaby gładkie przybliżenie u_0 .

Dowód. Standardowe przybliżenie przez splot $u_\varepsilon := u * \varphi_\varepsilon$ na pewno daje nam $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{R}^d)$ oraz $u_\varepsilon \rightarrow u$ w $W^{1,n}$. Pozostaje zmodyfikować to przybliżenie w taki sposób, by przyjmowało wartości w \mathcal{N} .

W tym celu rozważmy otoczenie tubularne $\mathcal{N}_{\varepsilon_0}$ oraz wielkość

$$\delta(r) := \sup_{B_r(p) \subseteq \mathbb{T}^n} \int_{B_r(p)} |\nabla u(x)|^n dx.$$

Ze względu na absolutną ciągłość całki względem miary mamy $\delta(r) \rightarrow 0$ przy $r \rightarrow 0$. Ustalmy teraz $p \in \mathbb{T}^n$. Z nierówności Poincarégo (Wniosek B.10)

$$\int_{B_\varepsilon(p)} |u(x) - u_\varepsilon(p)| dx \lesssim \left(\int_{B_\varepsilon(p)} |\nabla u(x)|^n dx \right)^{1/n} \leq \delta(\varepsilon)^{1/n},$$

dla dostatecznie małych $\varepsilon > 0$ otrzymana wartość jest więc mniejsza od ε_0 – promienia otoczenia tubularnego. Istnieje punkt $x \in B_\varepsilon(p)$, dla którego wartość $|u(x) - u_\varepsilon(p)|$ nie przekracza średniej, a więc $|u(x) - u_\varepsilon(p)| < \varepsilon_0$ (zbiór takich x ma nawet dodatnią miarę). Ponieważ $u(x) \in \mathcal{N}$ dla p.w. $x \in \mathbb{T}^n$, to dowodzi $\text{dist}(u_\varepsilon(p), \mathcal{N}) < \varepsilon_0$, a więc $u_\varepsilon(p) \in \mathcal{N}_{\varepsilon_0}$. Pozwala nam to rozważyć złożenie u_ε z rzutem $\pi: \mathcal{N}_{\varepsilon_0} \rightarrow \mathcal{N}$:

$$v_\varepsilon(x) := \pi(u_\varepsilon(x)).$$

W miejsce \mathbb{T}^n można przyjąć $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Dla torusa łatwiej jest jednak uzupełnić szczegóły techniczne.

Nadal jest to funkcja gładka, jednak spełnia $v_\varepsilon: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathcal{N}$. Ponadto

$$|u_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)| = \text{dist}(u_\varepsilon(x), \mathcal{N}) \leq |u_\varepsilon(x) - u(x)| \quad \text{dla p.w. } x \in \mathbb{T}^n,$$

co dowodzi zbieżności w L^2 . Korzystając z równości $\nabla \pi_{u(x)} \nabla u(x) = \nabla u(x)$ (Lemat B.12), zbieżność gradientów możemy uzyskać poprzez nierówność trójkąta:

$$\begin{aligned} |\nabla v_\varepsilon(x) - \nabla u(x)| &= |\nabla \pi_{u_\varepsilon(x)} \nabla u_\varepsilon(x) - \nabla \pi_{u(x)} \nabla u(x)| \\ &\leq |\nabla \pi_{u_\varepsilon(x)} (\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u(x))| + |(\nabla \pi_{u_\varepsilon(x)} - \nabla \pi_{u(x)}) \nabla u(x)| \\ &\lesssim |\nabla u_\varepsilon(x) - \nabla u(x)| + |u_\varepsilon(x) - u(x)| \cdot |\nabla u(x)|. \end{aligned}$$

Po rozważeniu normy L^2 widzimy, że pierwszy wyraz zbiega do zera wprost z założenia, a drugi na mocy twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej dzięki warunkowi $u_\varepsilon \rightarrow u$ p.w. \square

Dodatek C

Propozycje tematów zaliczeniowych

Poniższa lista propozycji tematów zaliczeniowych:

- zawiera jedynie propozycje – zakres tematyczny eseju zaliczeniowego może od nich odbiegać, jestem otwarty na dyskusję;
- zapewne jeszcze się wydłuży;
- nie jest zobowiązująca – można zaproponować jakiś inny temat w konsultacji ze mną.

Zasady zaliczania będą dostępne na kursie Moodle.

Potok (HMF) dla rozmaitości o niedodatniej krzywiznie sekcyjnej

Oprócz własności sformułowanych w Twierdzeniu 4.9 można pokazać więcej:

- zbieżność $u_t \rightarrow u_\infty$ przy $t \rightarrow \infty$ zachodzi bez potrzeby wybierania podciągu;
- graniczne przekształcenie u_∞ minimalizuje energię Dirichleta w swojej klasie homotopii;
- przekształcenia harmonicznych w tej klasie homotopii stanowią zbiór spójny.

Jako źródło może służyć oryginalna praca Hartmana [Har67] lub książka Lina i Wanga [LW08, Ch. 5.3].

Potok (HMF) $u: [0, \infty) \times \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ z warunkiem brzegowym $u_t(x) = x$

W przypadku potoku (HMF) $u: [0, \infty) \times \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ oprócz przekształcenia początkowego konieczne jest też określenie warunku brzegowego. Jeśli przyjmiemy warunek Dirichleta $u_t(x) = x$ dla $t > 0$, $x \in \mathbb{S}^2$, to okazuje się, że rozwiązanie u_t zbiega przy $t \rightarrow \infty$ (w odpowiednim sensie) do przekształcenia $u_\infty(x) = \frac{x}{|x|}$. Jako źródło może służyć oryginalna praca Honga [Hon98].

Symulacja numeryczna (HMF)

Zadaniem byłaby numeryczna symulacja potoku przekształceń harmoniczych z jednowymiarowej dziedziny, wraz z koniecznym komentarzem teoretycznym (dotyczącym zastosowanych rozwiązań) i przygotowaniem prezentacji. W grę wchodzi dziedzina $[0, 1]$ (z warunkami brzegowymi Dirichleta) oraz \mathbb{S}^1 .

Geometryczne aspekty konstrukcji Struwego

Potok (HMF) $u: [0, \infty) \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ w dwóch wymiarach (tzn. gdy $\dim \mathcal{M} = 2$) w ogólności nie zadaje homotopii między przekształceniami u_t dla różnych t , gdyż może mieć nieciągłości. Tych jest jednak tylko skończenie wiele. Zachowanie u w punkcie osobliwym (t_0, x_0) daje się opisać za pomocą gładkiego przekształcenia harmonicznego $\omega: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ (*bqbla*). Ponadto typ homotopijny $u_{t_0-\delta t}$ (tuż przed osobliwością) jest równy typowi homotopijnemu $u_{t_0+\delta t}$ (tuż po osobliwości) z *doklejonym* bąblem ω .

Co więcej, przy $t \rightarrow \infty$ mamy zbieżność $u_t \rightarrow u_\infty$ do przekształcenia harmonicznego $u_\infty: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$, i zbieżność ta ponownie jest gładka poza skończonym zbiorem osobliwym, na którym oddzielają się harmoniczne bąble. W konsekwencji każdy typ homotopijny (zadany przez przekształcenie początkowe $u_0: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$) można reprezentować poprzez *sklejenie* skończonej liczby przekształceń harmoniczych $\omega_j: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathcal{N}$ z przekształceniem harmonicznym $u_\infty: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$.

Więcej na ten temat można znaleźć w książce Lina i Wang [LW08, Ch. 6] lub oryginalnej pracy Struwego [Str85].

Problem Ginzburga-Landaua

Konstrukcja potoku przekształceń harmoniczych w wymiarze $n \geq 3$ [CS89] opiera się na problemie pomocniczym, w którym rozwiązanie nie musi przyjmować wartości w \mathcal{N} , ale jest niejako *karane* za odbieganie od \mathcal{N} . Pomysł ten jest motywowany modelem nadprzewodnictwa pochodzącym od Ginzburga i Landaua. W jego najbardziej uproszczonej wersji chcemy minimalizować energię Dirichleta $E(u)$ dla funkcji $u: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ z zadaniem warunkiem brzegowym $g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$. Gdy g jest homotopijnie nietrywialne, klasa dopuszczalnych funkcji ($u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^2, \mathbb{S}^1)$, $u|_{\mathbb{S}^1} = g$ w sensie śladu) jest jednak pusta, więc trzeba znaleźć inną drogę.

Tą drogą jest dopuszczenie dowolnych przekształceń $u: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ale za to minimalizowanie funkcjonału Ginzburga-Landaua

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{B}^2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{\mathbb{B}^2} (|u|^2 - 1)^2$$

dla pewnej małej wartości $\varepsilon > 0$; funkcjonał ten posiada jednoznaczne minimum u_ε . Można wykazać szereg własności tych minimów, i w szczególności wykazać zbieżność $u_\varepsilon \rightarrow u$ (przy $\varepsilon \rightarrow 0$) do funkcji, która w pewnym sensie rozwiązuje problem wyjściowy. Dobrym źródłem jest wstęp do książki Bethuela, Brezisa i Héleina [BBH17].

Funkcje klasy Sobolewa niemające gładkich przybliżeń

Zawieranie $H^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2) \subseteq W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ jest właściwe – nie każda funkcja $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ da się przybliżyć funkcjami gładkimi. Przykładem jest $u(x) = \frac{x}{|x|}$, a dowód opiera się na badaniu stopniu przekształcenia $\mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$.

Oto szkic. Niech $\omega \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ będzie 2-formą różniczkową na \mathbb{S}^2 o niezerowej całce (np. formą objętości). Wówczas $u^*\omega \in L^1(\mathbb{B}^3)$. Dla gładkiego $v: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ przekonujemy się, że

$$d(v^*\omega) = v^*(d\omega) = v^*0 = 0,$$

w konsekwencji całka po dowolnej sferze $\int_{S_r} v^*\omega$ (czyli właśnie *stopień przekształcenia*) jest równa zero. Tymczasem dla u nie jest!

Plan maksimum to

- zredagować kompletny dowód faktu, że $u(x) = \frac{x}{|x|}$ nie jest granicą funkcji gładkich w $W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$;
- w podobny sposób wyprowadzić twierdzenie Brouwera o retrakcji: nie istnieje funkcja ciągła $u: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ (można przyjąć, że gładka), dla której $u|_{\partial\mathbb{B}^3} = \text{id}$;
- omówić (niekoniecznie udowodnić) twierdzenie charakteryzujące, które funkcje w $W^{1,2}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ posiadają gładkie przybliżenia, a które nie (warunkiem koniecznym i dostatecznym okazuje się $d(u^*\omega) = 0$ w sensie dystrybucyjnym).

Do pierwszego punktu źródłem może być praca Schoena i Uhlenbeck [SU83, Sec. 4], a do trzeciego – artykuł Bethuela [Bet90, Th. 1].

Bibliografia

- [BBH17] Fabrice Bethuel, Haïm Brezis, and Frédéric Hélein. *Ginzburg-Landau vortices*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser/Springer, Cham, 2017. Reprint of the 1994 edition [MR1269538].
- [Bet90] F. Bethuel. A characterization of maps in $H^1(B^3, S^2)$ which can be approximated by smooth maps. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 7(4):269–286, 1990.
- [CD90] Yun Mei Chen and Wei Yue Ding. Blow-up and global existence for heat flows of harmonic maps. *Invent. Math.*, 99(3):567–578, 1990.
- [CD91] Kung-Ching Chang and Wei Yue Ding. A result on the global existence for heat flows of harmonic maps from D^2 into S^2 . In *Nematics (Orsay, 1990)*, volume 332 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.*, pages 37–47. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [CDY92] Kung-Ching Chang, Wei Yue Ding, and Rugang Ye. Finite-time blow-up of the heat flow of harmonic maps from surfaces. *J. Differential Geom.*, 36(2):507–515, 1992.
- [CS89] Yun Mei Chen and Michael Struwe. Existence and partial regularity results for the heat flow for harmonic maps. *Math. Z.*, 201(1):83–103, 1989.
- [ES64] James Eells, Jr. and J. H. Sampson. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.
- [Eva10] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.
- [GHL04] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, and Jacques Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [Har67] Philip Hartman. On homotopic harmonic maps. *Canadian J. Math.*, 19:673–687, 1967.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [Hon98] Min-Chun Hong. Some new examples for nonuniqueness of the evolution problem of harmonic maps. *Comm. Anal. Geom.*, 6(4):809–818, 1998.
- [JS10] Jacek Jakubowski and Rafał Sztencel. *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*. Wydawnictwo SCRIPT, Warszawa, 2010. Wydanie IV rozszerzone.
- [Lat11] Rafał Latała. Wstęp do Analizy Stochastycznej. *Skrypt wykładu [dostępny online](#)*, 2011.
- [Lee97] John M. Lee. *Riemannian manifolds*, volume 176 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to curvature.
- [Lie96] Gary M. Lieberman. *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [LW08] Fanghua Lin and Changyou Wang. *The analysis of harmonic maps and their heat flows*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2008.
- [Mil97] John W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Based on notes by David W. Weaver, Revised reprint of the 1965 original.
- [Mos64] Jürgen Moser. A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:101–134, 1964.
- [Pet06] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [Str85] Michael Struwe. On the evolution of harmonic mappings of Riemannian surfaces. *Comment. Math. Helv.*, 60(4):558–581, 1985.
- [Str88] Michael Struwe. On the evolution of harmonic maps in higher dimensions. *J. Differential Geom.*, 28(3):485–502, 1988.
- [Str06] Paweł Strzelecki. *Krótkie wprowadzenie do równań różniczkowych cząstkowych*. Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 2006.
- [Str12] Paweł Strzelecki. Analiza matematyczna II. *Skrypt wykładu [dostępny online](#)*, 2011/2012.
- [SU83] Richard Schoen and Karen Uhlenbeck. Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps. *J. Differential Geom.*, 18(2):253–268, 1983.